M.L. KRASNOV

RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

M. KRASNOV, A. KISSÉLEV, G. MAKARENKO

RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

PRÉFACE
DE L'ÉDITION FRANÇAISE

Le présent recueil de problèmes et d'exercices sur les équations différentielles ordinaires s'adresse surtout aux élèves des établissements d'enseignement technique supérieur.

Une attention particulière y est portée aux sujets qui ne sont pas traités de façon suffisamment détaillée dans les manuels disponibles et qui sont, comme le montre l'expérience, difficiles à assimiler (méthode des isoclines pour les équations du premier et du second ordre, problèmes sur les trajectoires orthogonales, dépendance et indépendance linéaires des systèmes de fonctions).

Ce recueil rassemble un grand nombre de problèmes sur les équations linéaires à coefficients constants et variables, sur la stabilité au sens de Liapounov, sur l'application de la méthode opérationnelle à la résolution des équations et systèmes différentiels. On y examine d'une manière approfondie la méthode des approximations successives, les solutions singulières des équations différentielles, la méthode de superposition pour la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n, l'intégration des équations différentielles à l'aide de séries.

Pour aider le lecteur, chaque paragraphe a été précédé d'un « avant-propos » où sont rappelés quelques formules et théorèmes essentiels. Y sont également données les solutions détaillées des problèmes types. Tous les problèmes comportent des réponses et parfois de brèves indications pour leur résolution.

Le recueil est axé sur le manuel de L. Elsgoltz « Equations différentielles et calcul variationnel » (en russe), Editions « Naouka », Moscou, 1965.

Nous serons contents si notre livre s'avère utile aux lecteurs.

Krasnov, Kissélev, Makarenko.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

§ 1. Notions fondamentales et définitions

On appelle *équation différentielle* une relation entre une variable indépendante x, la fonction cherchée $y = y(x)$ et ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ c'est-à-dire une équation de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Si la fonction cherchée $y = y(x)$ est une fonction de la seule variable x, l'équation différentielle est dite *ordinaire* *), par exemple

1) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$, 2) $y'' + y' + x = \cos x$, 3) $(x^2 - y^2)\,dx - (x + y)\,dy = 0$.

Lorsque la fonction inconnue y dépend de deux ou plusieurs variables, par exemple si $y = y(x, t)$, l'équation de la forme

$$F\left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x^k \partial t^l}\right) = 0$$

est dite *aux dérivées partielles*. Ici k, l sont des entiers non négatifs tels que $k + l = m$; par exemple

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On appelle *ordre de l'équation différentielle* l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Par exemple, $y' + xy = e^x$ est une équation différentielle du premier ordre, $y'' + p(x)\,y = 0$, où $p(x)$ est une fonction connue, une équation différentielle du second ordre; $y^{(9)} - xy'' = x^2$ est une équation différentielle d'ordre 9.

On appelle *solution d'une équation différentielle* d'ordre n sur un intervalle (a, b) une fonction $y = \varphi(x)$ définie sur cet intervalle (a, b) avec ses dérivées jusqu'à l'ordre n y compris et telle que la substitution de la fonction $y = \varphi(x)$ dans l'équation différentielle

*) Dans la suite de cet ouvrage nous ne nous occuperons que des équations différentielles ordinaires.

transforme cette dernière en une identité par rapport à x sur (a, b). Par exemple, la fonction $y = \sin x + \cos x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. En effet, en dérivant deux fois cette fonction, on aura

$$y' = \cos x - \sin x, \qquad y'' = -\sin x - \cos x.$$

En portant les expressions de y'' et de y dans l'équation différentielle, on obtient une identité

$$-\sin x - \cos x + \sin x + \cos x \equiv 0.$$

La courbe solution d'une équation différentielle est appelée *courbe intégrale* de cette équation.

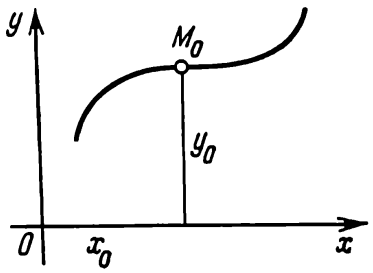

Fig. 1

La *forme générale de l'équation du premier ordre* est

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Si l'on parvient à résoudre l'équation (1) par rapport à y', on obtiendra

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

c'est-à-dire une *équation du premier ordre résolue par rapport à la dérivée.*

On appelle *problème de Cauchy* le problème qui consiste à trouver une solution $y = y(x)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (une autre notation: $y|_{x=x_0} = y_0$).

En interprétation géométrique cela signifie qu'on cherche une courbe intégrale qui passe par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy (fig. 1).

Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. *Soit donnée une équation différentielle $y' = f(x, y)$ où la fonction $f(x, y)$ est définie dans un certain domaine D du plan xOy contenant le point (x_0, y_0). Si la fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions:*

a) *$f(x, y)$ est une fonction continue de deux variables x et y dans le domaine D;*

b) *$f(x, y)$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée dans le domaine D, il existe un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ sur lequel cette équation admet une solution et une seule $y = \varphi(x)$ satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$.*

Le théorème fournit les conditions suffisantes d'existence de l'unique solution du problème de Cauchy pour l'équation $y' = f(x, y)$, mais ces conditions ne sont pas nécessaires. En effet, l'équation $y' = f(x, y)$ peut posséder une solution unique satisfai-

sant à la condition $y(x_0) = y_0$ sans que les conditions a) ou b) ou les deux à la fois soient remplies au point (x_0, y_0).

Traitons quelques exemples.

1. $y' = \frac{1}{y^2}$. Ici $f(x, y) = 1/y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2/y^3$. Aux points $(x_0, 0)$ de l'axe Ox les conditions a) et b) ne sont pas satisfaites (la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont discontinues sur l'axe Ox

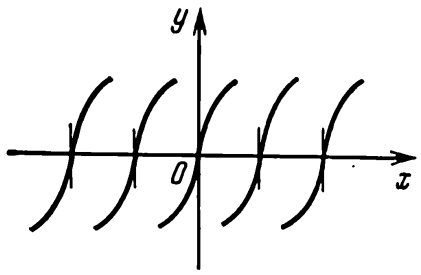

Fig. 2

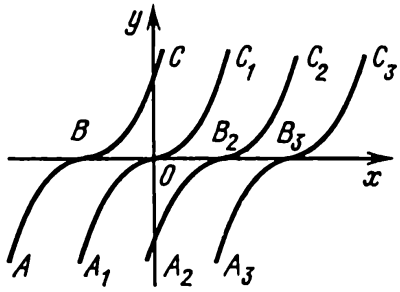

Fig. 3

et ne sont pas bornées pour $y \to 0$), mais par chaque point de l'axe Ox il passe l'unique courbe intégrale $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ (fig. 2). ◆

2. $y' = xy + e^{-y}$. Le second membre de l'équation $f(x, y) = xy + e^{-y}$ et la dérivée partielle $\partial f/\partial y = x - e^{-y}$ sont continus en x et y en tous les points du plan xOy. En raison du théorème d'existence et d'unicité, le domaine dans lequel l'équation donnée possède l'unique solution est tout le plan xOy. ◆

3. $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$. Le second membre de l'équation $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ est défini et continu en tous les points du plan xOy. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} = 1/\sqrt[3]{y}$ tend vers l'infini lorsque $y = 0$, c'est-à-dire sur l'axe Ox, de sorte que pour $y = 0$ la condition b) du théorème d'existence et d'unicité n'est pas satisfaite. Par suite, l'unicité n'est pas garantie aux points de l'axe Ox. On vérifiera aisément que la fonction $y = (x + c)^3/8$ est solution de l'équation considérée. De plus, cette équation a une solution évidente $y \equiv 0$. Ainsi, par chaque point de l'axe Ox il passe au moins deux courbes intégrales et donc effectivement l'unicité n'est pas vérifiée aux points de cet axe (fig. 3).

L'équation donnée admettra aussi pour courbes intégrales des courbes constituées de morceaux de paraboles cubiques $y = (x + c)^3/8$ et de tronçons de l'axe Ox, par exemple $ABOC_1$, ABB_2C_2, A_2B_2x et autres, de sorte que par chaque point de l'axe Ox il passe une infinité de courbes intégrales. ◆

Remarque. La condition d'être bornée, imposée à la dérivée $\partial f/\partial y$ dans le théorème relatif à l'existence et à l'unicité de la solution du problème de Cauchy peut être un peu affaiblie et remplacée par une condition dite *condition de Lipschitz.*

On dit qu'une fonction $f(x, y)$ définie dans un certain domaine D satisfait à une condition de Lipschitz en y s'il existe une constante L (constante de Lipschitz) telle que, quels que soient y_1, y_2 de D et quel que soit x de D l'on ait l'inégalité

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L\,|y_2 - y_1|.$$

L'existence dans le domaine D d'une dérivée bornée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est suffisante pour que la fonction $f(x, y)$ vérifie dans D la condition de Lipschitz (nous laissons au lecteur le soin de le démontrer). Au contraire, la condition de Lipschitz n'implique pas que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bornée; cette dernière peut en général ne pas exister. Par exemple, pour l'équation $y' = 2\,|y|\cos x$, la fonction $f(x, y) = 2\,|y|\cos x$ n'est pas dérivable par rapport à y au point $(x_0, 0)$, $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, mais la condition de Lipschitz est satisfaite au voisinage de ce point. En effet,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |2\,|y_2|\cos x - 2\,|y_1|\cos x| =$$
$$= 2\,|\cos x|\,\big||y_2| - |y_1|\big| \leqslant 2\,|y_2 - y_1|,$$

puisque $|\cos x| \leqslant 1$ et $\big||y_2| - |y_1|\big| \leqslant |y_2 - y_1|$. Ainsi, la condition de Lipschitz est satisfaite avec une constante $L = 2$.

Théorème. *Si une fonction $f(x, y)$ est continue et satisfait à une condition de Lipschitz en y dans un domaine D, le problème de Cauchy*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y\,|_{x=x_0} = y_0, \qquad (x_0, y_0) \in D$$

a une solution unique.

La condition de Lipschitz est essentielle pour l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Considérons à titre d'exemple l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

On se rend compte sans peine que la fonction $f(x, y)$ est continue; d'autre part on a

$$f(x, Y) - f(x, y) = \frac{4x^3(x^4 - yY)}{(x^4 + y^2)(x^4 + Y^2)}(Y - y).$$

Si $y=\alpha x^2$, $Y=\beta x^2$, alors

$$|f(x, Y)-f(x, y)|=\frac{4}{|x|}\left|\frac{1-\alpha\beta}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right||Y-y|,$$

et la condition de Lipschitz n'est remplie dans aucune région comprenant l'origine $O(0, 0)$ parce que le facteur de $|Y-y|$ se trouve non borné quand $x \to 0$.

Cette équation différentielle admet une solution

$$y=C^2-\sqrt{x^4+C^4},$$

où C est une constante arbitraire. On en déduit qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant à la condition initiale $y(0)=0$.

On appelle *solution générale* de l'équation différentielle (2) une fonction

$$y=\varphi(x, C) \tag{3}$$

dépendant de la seule constante arbitraire C et telle que 1) elle satisfait à l'équation (2) pour toutes valeurs admissibles de la constante C; 2) quelle que soit la condition initiale

$$y|_{x=x_0}=y_0, \tag{4}$$

on peut choisir une telle valeur C_0 de la constante C que la solution $y=\varphi(x, C_0)$ satisfasse à la condition initiale donnée (4). Dans ces conditions, on suppose que le point (x_0, y_0) appartient à la région où sont satisfaites les conditions d'existence et d'unicité de la solution.

On appelle *solution particulière* de l'équation différentielle (2) une solution obtenue à partir de la solution générale (3) pour une valeur quelconque déterminée de la constante arbitraire C.

Exemple 4. Vérifier que la fonction $y=x+C$ est la solution générale de l'équation différentielle $y'=1$ et trouver une solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y|_{x=0}=0$. Donner l'interprétation géométrique du résultat.

Solution. La fonction $y=x+C$ vérifie l'équation donnée quelles que soient les valeurs de la constante arbitraire C. En effet, $y'=(x+C)'=1$.

Donnons-nous une condition initiale arbitraire $y|_{x=x_0}=y_0$. En posant $x=x_0$ et $y=y_0$ dans l'égalité $y=x+C$, on trouve que $C=y_0-x_0$. En portant cette valeur de C dans la fonction donnée on aura $y=x+y_0-x_0$. Cette fonction satisfait à la condition initiale donnée: en posant $x=x_0$ on obtient $y=x_0+$ $+y_0-x_0=y_0$. Ainsi, la fonction $y=x+C$ est la solution générale de l'équation considérée.

En particulier, en posant $x_0=0$ et $y_0=0$, on obtient une solution particulière $y=x$.

La solution générale de cette équation, c'est-à-dire la fonction $y = x + C$, définit dans le plan xOy une famille de droites parallèles avec le coefficient angulaire $k = 1$. Par chaque point $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy il passe l'unique courbe intégrale $y = x + y_0 - x_0$. La solution particulière $y = x$ définit l'une des courbes intégrales, à savoir une droite passant par l'origine des coordonnées (fig. 4).

Exemple 5. Vérifier que la fonction $y = Ce^x$ est la solution générale de l'équation $y' - y = 0$ et trouver une solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y|_{x=1} = -1$.

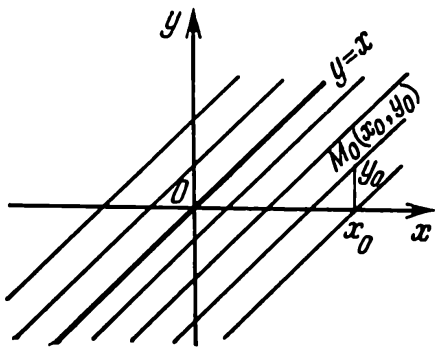

Fig. 4

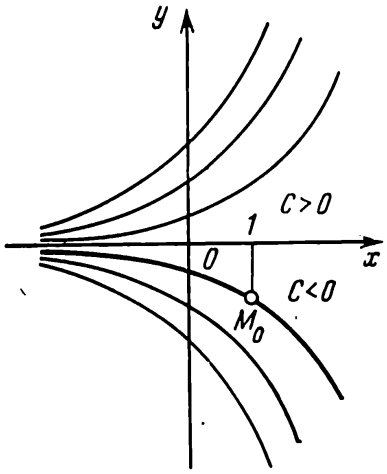

Fig. 5

Solution. On a $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$. En portant dans l'équation donnée les expressions de y et y' on obtient $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, c'est-à-dire que la fonction $y = Ce^x$ satisfait à l'équation donnée quelle que soit la valeur de la constante C.

Donnons-nous une condition initiale quelconque $y|_{x=x_0} = y_0$. En introduisant x_0 et y_0 au lieu de x et y dans la fonction $y = Ce^x$, on aura $y_0 = Ce^{x_0}$, d'où $C = y_0e^{-x_0}$. La fonction $y = y_0e^{x-x_0}$ satisfait à la condition initiale. En effet, en posant $x = x_0$, on obtient $y = y_0e^{x_0-x_0} = y_0$. La fonction $y = Ce^x$ est la solution générale de l'équation donnée.

Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ on obtient une solution particulière $y = -e^{x-1}$.

Au point de vue géométrique, la solution générale définit une famille de courbes intégrales qui sont les graphiques de fonctions exponentielles; la solution particulière satisfaisant à la condition initiale est une courbe intégrale passant par le point $M_0(1, -1)$ (fig. 5). ◆

Une relation de la forme $\Phi(x, y, C) = 0$ qui définit implicitement la solution générale s'appelle *intégrale générale* de l'équation différentielle du premier ordre.

Une relation obtenue à partir de l'intégrale générale pour une valeur concrète de la constante arbitraire C s'appelle *intégrale particulière* de l'équation différentielle.

Le problème de résolution ou d'intégration d'une équation différentielle consiste à trouver la solution générale ou l'intégrale générale de cette équation. Si de plus est donnée une condition initiale, on a alors à trouver aussi une solution particulière ou une intégrale particulière satisfaisant à cette condition initiale.

Les coordonnées x et y étant au point de vue géométrique équivalentes, nous aurons à traiter en plus de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ aussi l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

1. Trouver des solutions coïncidentes de deux équations différentielles :

a) $y' = y^2 + 2x - x^4$; b) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$.

En utilisant une condition suffisante quelconque d'unicité, déterminer dans les problèmes suivants des régions dans lesquelles les équations données possèdent des solutions uniques :

2. $y' = x^2 + y^2$.

3. $y' = \frac{x}{y}$.

4. $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$.

5. $y' = \sqrt{x - y}$.

6. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$.

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

8. $y' = \frac{y+1}{x-y}$.

9. $y' = \sin y - \cos x$.

10. $y' = 1 - \operatorname{ctg} y$.

11. $y' = \sqrt[3]{3x - y - 1}$

12. Montrer que pour l'équation $y' = |y|^{1/2}$ la solution n'est unique en aucun point de l'axe Ox.

13. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y' = \sin(x \cdot y)$ passant par le point $O(0, 0)$.

Dans les problèmes suivants, montrer que les fonctions données sont solutions des équations différentielles indiquées :

14. $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

15. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, $y' + 2y = e^x$.

16. $y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

§ 2. Méthode des isoclines

L'équation

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

définit en chaque point (x, y), où il existe la fonction $f(x, y)$, la valeur de y', c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la courbe intégrale en ce point.

Si en chaque point d'un domaine D est donnée la valeur d'une certaine grandeur, on dit que dans le domaine D est défini le *champ* de cette grandeur. L'équation différentielle (1) définit ainsi un *champ de directions.*

Tout triplet de nombres (x, y, y') définit la direction d'une droite passant par le point (x, y). L'ensemble des segments de telles droites fournit l'image géométrique du champ de directions.

Le problème d'intégration de l'équation différentielle (1) peut maintenant être énoncé comme suit : trouver la courbe telle que la tangente en chaque point ait la même direction que le champ en ce point.

Le problème de construction de la courbe intégrale est souvent résolu à l'aide d'isoclines. On appelle *isocline* le lieu géométrique des points en lesquels les tangentes aux courbes intégrales cherchées ont une seule et même direction. La famille d'isoclines de l'équation différentielle (1) est définie par l'équation

$$f(x, y) = k, \tag{2}$$

où k est un paramètre. En donnant au paramètre k des valeurs numériques assez proches l'une de l'autre, on obtient un réseau d'isoclines suffisamment dense à l'aide duquel on peut construire de façon approchée les courbes intégrales de l'équation différentielle (1).

Remarque 1. L'isocline zéro $f(x, y) = 0$ fournit l'équation des lignes sur lesquelles peuvent se situer les points de maximum et de minimum des courbes intégrales. Pour améliorer la précision lors de la construction des courbes intégrales on trouve aussi le lieu géométrique des points d'inflexion. A cet effet, on calcule y'' d'après l'équation (1) :

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

et on l'annule. La ligne définie par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

représente justement le lieu possible des points d'inflexion.

Exemple 1. Construire de façon approchée, à l'aide d'isoclines, les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = 2x - y$.

Solution. Pour obtenir l'équation des isoclines, posons $y' = k$, $k = \text{const}$, alors il vient

$$2x - y = k \text{ ou } y = 2x - k.$$

Les isoclines sont des droites parallèles. Pour $k = 0$ on obtient l'isocline $y = 2x$. Cette droite sépare le plan xOy en deux parties dans lesquelles la dérivée y' a le même signe (fig. 6).

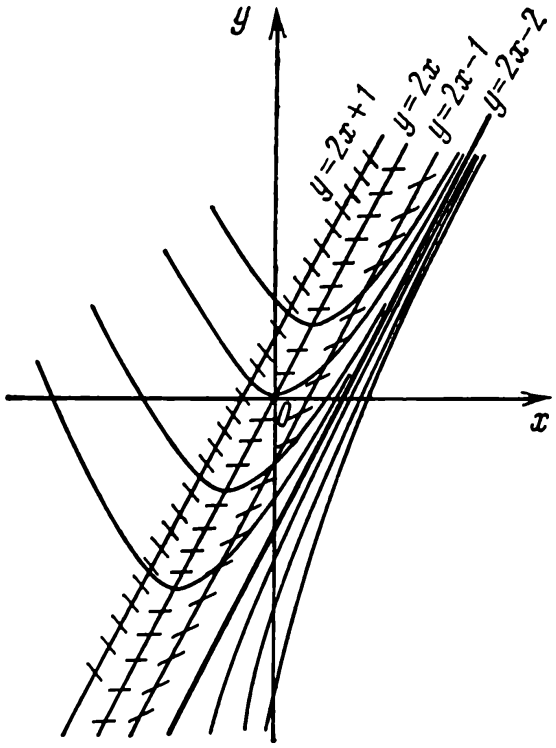

Fig. 6

En coupant la droite $y = 2x$, les courbes intégrales passent de la région de décroissance de la fonction y dans la région de croissance et inversement, ce qui signifie que sur cette droite sont situés des points extrémaux des courbes intégrales, à savoir des points de minimum.

Prenons encore deux isoclines:

$$y = 2x + 1,\ k = -1 \quad \text{et} \quad y = 2x - 1,\ k = 1.$$

Les tangentes menées aux courbes intégrales en des points d'intersection avec les isoclines $k = -1$ et $k = 1$ forment avec l'axe Ox les angles de 135° et 45° respectivement. Puis, calculons la dérivée seconde $y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$.

La droite $y = 2x - 2$ sur laquelle $y'' = 0$ est une isocline obtenue pour $k = 2$ et en même temps une courbe intégrale; on peut s'en assurer par une simple substitution dans l'équation. Puisque

le second membre de l'équation donnée $f(x, y) = 2x - y$ satisfait aux conditions du théorème d'existence et d'unicité dans tout le plan xOy, les autres courbes intégrales ne coupent pas cette isocline. L'isocline $y = 2x$ sur laquelle se situent les points de minimum des courbes intégrales passe au-dessus de l'isocline $y = 2x - 2$ et, de ce fait, les courbes intégrales situées au-dessous de l'isocline $y = 2x - 2$ n'ont pas de points extrémaux.

La droite $y = 2x - 2$ divise le plan xOy en deux parties: dans l'une d'elles (située au-dessus de la droite) $y'' > 0$ et donc la concavité des courbes intégrales est dirigée vers le haut alors que dans l'autre $y'' < 0$ et, par suite, la concavité des courbes intégrales est tournée vers le bas. Les courbes intégrales ne coupent pas la droite $y = 2x - 2$ et, par conséquent, cette dernière ne constitue pas un lieu géométrique des points d'inflexion. Les courbes intégrales de l'équation donnée ne comportent pas de points d'inflexion.

L'étude que nous venons d'effectuer permet de construire de façon approchée une famille de courbes intégrales de l'équation considérée (fig. 6).

Exemple 2. En appliquant la méthode des isoclines, construire de façon approchée les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = \sin(x + y)$.

Solution. En posant $y' = k$, où k est une constante, on obtient l'équation des isoclines $\sin(x + y) = k$ avec $-1 \leqslant k \leqslant 1$. Pour $k = 0$ on obtient $\sin(x + y) = 0$, d'où

$$y = -x + \pi n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

Aux points d'intersection avec les isoclines, les courbes intégrales ont des tangentes horizontales.

Cherchons à établir si les courbes intégrales possèdent un extrémum sur les isoclines $y = -x + \pi n$. A cet effet, calculons la dérivée seconde:

$$y'' = (1 + y')\cos(x + y) = [1 + \sin(x + y)]\cos(x + y).$$

Pour $y = -x + \pi n$ on a

$$y'' = (1 + \sin \pi n)\cos \pi n = \cos \pi n = (-1)^n.$$

Si n est pair, $y'' > 0$ et donc les courbes intégrales présentent un minimum aux points d'intersection avec les isoclines $y = -x + \pi n$, $n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, au contraire, si n est impair, $y'' < 0$ et les courbes intégrales passent par un maximum aux points d'intersection avec les isoclines $y = -x + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$ Cherchons les isoclines

$$k = -1, \quad \sin(x + y) = -1; \quad y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \tag{6}$$

$$k = 1, \quad \sin(x + y) = 1; \quad y = -x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \tag{7}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Les isoclines sont des droites parallèles ayant un coefficient angulaire égal à —1, c'est-à-dire elles coupent l'axe Ox sous un angle de 135°. Il est aisé de voir que les isoclines $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, sont des courbes intégrales de l'équation différentielle donnée (à cet effet il suffit de porter la fonction $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ dans l'équation $y' = \sin(x + y)$).

En tous les points du plan xOy le second membre de l'équation donnée, c'est-à-dire la fonction $f(x, y) = \sin(x + y)$ satisfait à toutes les conditions du théorème d'existence et d'unicité de sorte que les courbes intégrales n'ont pas de points communs et donc ne coupent pas les isoclines $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Puis, la dérivée y'' s'annule pour $1 + \sin(x + y) = 0$, c'est-à-dire sur les isoclines (6) et pour $\cos(x + y) = 0$, c'est-à-dire sur les isoclines (6) et (7). Lors du passage (de gauche à droite) par les isoclines (7) la dérivée y'' change son signe plus en signe moins. Par exemple, si l'on considère la bande comprise entre les isoclines $y = -x$ et $y = -x + \pi$, la dérivée $y'' = 0$ sur l'isocline $y = -x + \frac{\pi}{2}$ et $y'' > 0$ sous cette isocline. Cela signifie que la concavité des courbes intégrales est dirigée vers le haut alors qu'au-dessus de l'isocline $y'' < 0$ et donc la concavité des courbes intégrales est tournée vers le bas. Ainsi, les isoclines (7) forment le lieu géométrique des points d'inflexion des courbes intégrales. Les résultats obtenus permettent de construire de façon approchée la famille de courbes intégrales de l'équation donnée. Pour augmenter la précision de construction il convient de porter encore quelques isoclines (fig. 7).

Exemple 3. En utilisant la méthode des isoclines, construire les courbes intégrales de l'équation $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

Solution. Posons $y' = k$, où k est une constante. Alors l'équation des isoclines sera

$$y - x^2 + 2x - 2 = k, \quad \text{ou} \quad y = x^2 - 2x + 2 + k.$$

Les isoclines sont des paraboles à axe de symétrie vertical $x = 1$. Parmi ces isoclines il n'y a pas de courbes intégrales. En effet, en portant dans l'équation donnée $y = x^2 - 2x + 2 + k$ et $y' = 2x - 2$ on aura $2x - 2 = x^2 - 2x + 2 + k - x^2 + 2x - 2$ ou $2x - 2 = k$. Or, cette égalité ne peut être identiquement vérifiée par rapport à x pour aucune valeur de k.

Soit $k = 0$. Alors, aux points d'intersection avec l'isocline $y = x^2 - 2x + 2$ les courbes intégrales auront des tangentes horizontales. L'isocline $y = x^2 - 2x + 2$ divise le plan xOy en deux parties: dans l'une d'elles $y' < 0$ (les solutions y décroissent) et dans l'autre $y' > 0$ (les solutions y croissent). Puisque cette isocline n'est pas une courbe intégrale, elle renferme des points extrémaux

des courbes intégrales, à savoir la partie de la parabole $y = x^2 - 2x + 2$, où $x < 1$, comprend les points de minimum et l'autre partie de cette parabole, où $x > 1$, comporte des points de maximum. La courbe intégrale passant par le point (1 ; 1), c'est-à-dire par le sommet de la parabole $y = x^2 - 2x + 2$, ne présente aucun extrémum en ce point. En des points des isoclines $y = x^2 - 2x + 3$ ($k = 1$) et $y = x^2 - 2x + 1$ ($k = -1$) les tangentes aux courbes

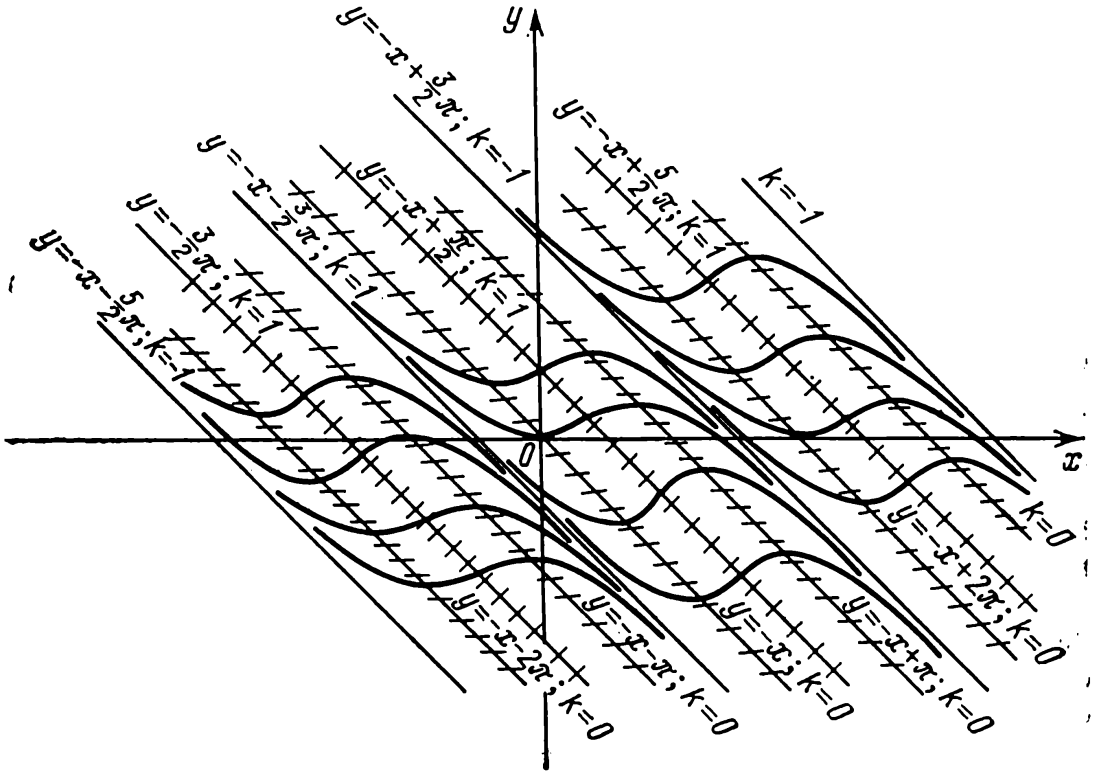

Fig. 7

intégrales ont des coefficients angulaires égaux respectivement à 1 et —1.

Pour déterminer le sens de la concavité des courbes intégrales, prenons la dérivée seconde

$$y'' = y' - 2x + 2 = y - x^2 + 2x - 2 - 2x + 2 = y - x^2.$$

Elle ne s'annule qu'en des points situés sur la parabole $y = x^2$. Dans le plan xOy, la concavité des courbes intégrales est dirigée vers le bas ($y'' < 0$) en des points dont les coordonnées satisfont à la condition $y < x^2$ et vers le haut ($y'' > 0$) en des points où $y > x^2$. Les points d'intersection des courbes intégrales avec la parabole $y = x^2$ sont des points d'inflexion de ces courbes. Ainsi la parabole $y = x^2$ est le lieu géométrique des points d'inflexion des courbes intégrales.

Le second membre de l'équation initiale $f(x, y) = y - x^2 + 2x - 2$ satisfaisant en tous les points du plan xOy aux conditions du théorème d'existence et d'unicité, il ne passe donc par chaque point du plan que l'unique courbe intégrale de l'équation.

En partant des résultats obtenus, on construit de façon approchée une famille de courbes intégrales de l'équation donnée (fig. 8).

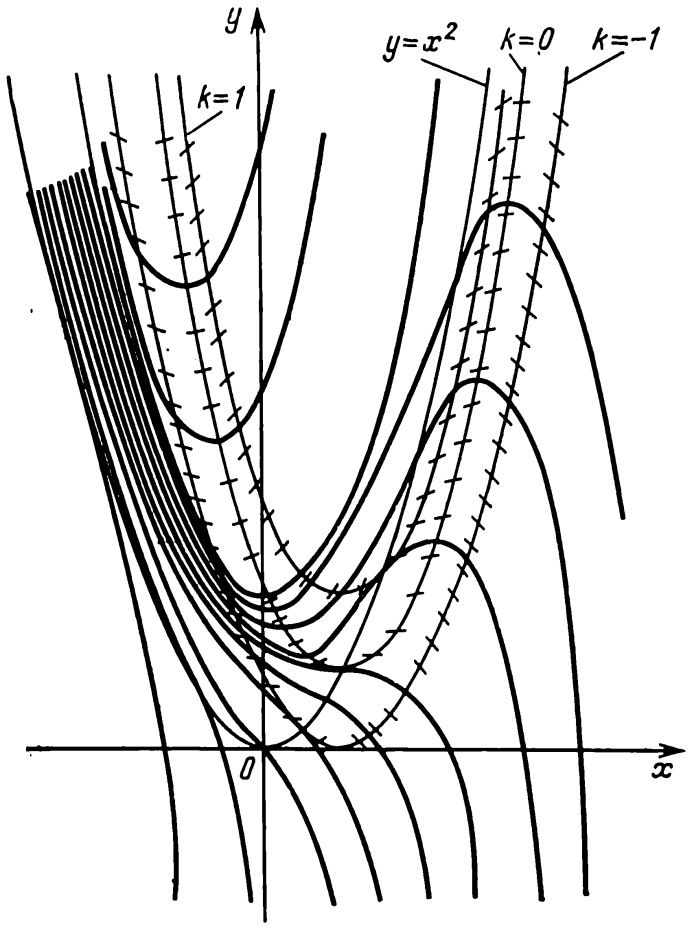

Fig. 8

Remarque 2. Les points d'intersection de deux ou plusieurs isoclines peuvent représenter des *points singuliers de l'équation différentielle* (1), c'est-à-dire des points en lesquels le second membre de l'équation (1) n'est pas défini.

Considérons l'équation $y' = y/x$. La famille d'isoclines est définie par l'équation $y/x = k$. C'est une famille de droites passant par l'origine des coordonnées de sorte qu'à l'origine de coordonnées se croisent des isoclines correspondant à des différentes pentes des tangentes aux courbes intégrales. Il est facile d'établir que la solution générale de l'équation donnée est de la forme $y = Cx$ et que

le point (0, 0) est un point singulier de l'équation différentielle. Ici, les isoclines sont des courbes intégrales de l'équation (fig. 9).

Exemple 4. En appliquant la méthode des isoclines, construire les courbes intégrales de l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.

Solution. En posant $y' = k$, k=const, on obtient l'équation des isoclines $\frac{y-x}{y+x} = k$. Ainsi, les isoclines sont des droites passant par l'origine des coordonnées O (0, 0).

Pour $k = -1$ on obtient l'isocline $y = 0$; pour $k = 0$, l'isocline $y = x$ et pour $k = 1$, l'isocline $x = 0$.

En considérant l'équation « renversée »

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y+x}{y-x},$$

on trouve l'isocline $y = -x$ pour laquelle les courbes intégrales ont en tous les points des tangentes verticales.

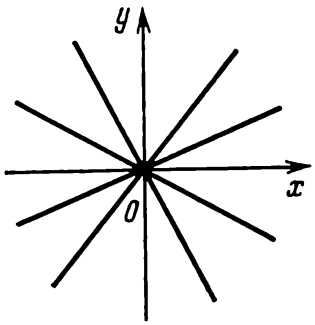

Fig. 9

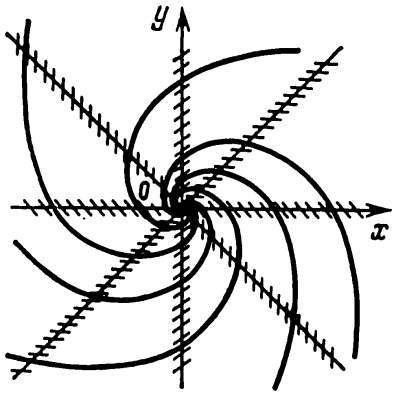

Fig. 10

Au point (0, 0) toutes les isoclines de cette équation se coupent (point singulier de l'équation).

En utilisant les isoclines obtenues, on construit les courbes intégrales (fig. 10).

17. Trouver l'angle α que font au point M (2, 1) les courbes intégrales des équations $y' = x + y$ et $y' = x - y$.

18. Les courbes intégrales de l'équation $y' = x^2 + y^2 + 1$ sous quel angle α coupent-elles l'axe Ox au point O (0, 0)?

19. Trouver les points extrémaux des courbes intégrales de l'équation $y' = x + 1$.

20. Trouver les points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation $y' = y - x^2$.

En appliquant la méthode des isoclines, construire les courbes intégrales des équations différentielles suivantes:

21. $y' = x + 1$.
22. $y' = x + y$.
23. $y' = y - x$.
24. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$.
25. $y' = (y - 1)^2$.
26. $y' = (y - 1)x$.
27. $y' = x^2 - y^2$.
28. $y' = \cos(x - y)$.
29. $y' = y - x^2$.
30. $y' = x^2 + 2x - y$.
31. $y' = \frac{y+1}{x-1}$.
32. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
33. $y' = 1 - x$.
34. $y' = 2x - y$.
35. $y' = x^2 + y$.
36. $y' = -y/x$.
37. $y' = 1$.
38. $y' = 1/x$.
39. $y' = y$.
40. $y' = y^2$.

§ 3. Méthode des approximations successives

Soit à chercher la solution $y = y(x)$ d'une équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

qui satisfait à la condition initiale

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{2}$$

Nous supposons que dans un certain rectangle

$$D\{|x - x_0| < a, \ |y - y_0| < b\}$$

de centre au point (x_0, y_0) l'équation (1) satisfait aux conditions a) et b) du théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (1)-(2) (v. page 8).

La solution du problème (1)-(2) peut être trouvée par la *méthode* dite *des approximations successives* qui peut se résumer comme suit.

Construisons une suite $\{y_n(x)\}$ de fonctions définies par les relations récurrentes

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Pour approximation d'ordre zéro $y_0(x)$ on peut prendre toute fonction continue au voisinage du point $x = x_0$ et en particulier $y_0(x) \equiv y_0$ qui est la condition initiale du problème de Cauchy (2). On peut démontrer que sous les hypothèses faites sur l'équation (1) les

approximations successives $\{y_n(x)\}$ convergent vers la solution exacte de l'équation (1) satisfaisant à la condition (2) dans un certain intervalle $x_0 - h < x < x_0 + h$, où

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x,\, y) \in D} |f(x, y)|. \tag{4}$$

L'évaluation de l'erreur obtenue lorsque la solution exacte $y(x)$ est remplacée par l'approximation d'ordre n $y_n(x)$ est donnée par l'inégalité

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n, \tag{5}$$

où $N = \max\limits_{(x,\, y) \in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

En appliquant la méthode des approximations successives il convient de s'arrêter sur un n tel que $|y_{n+1} - y_n|$ ne dépasse pas l'erreur admissible.

Exemple 1. Trouver par approximations successives la solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = y$ qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 1$.

Solution. Il est évident que les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy sont satisfaites pour cette équation dans tout le plan xOy. Construisons la suite de fonctions $\{y_n(x)\}$ définies par les relations (3), en prenant pour approximation d'ordre zéro $y_0(x) \equiv 1$:

$$y_0(x) \equiv 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t)\, dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)\, dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

et en général,

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\, dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Il est clair que $y_n(x) \to e^x$ lorsque $n \to \infty$. Une vérification directe montre que la fonction $y(x) = e^x$ résout le problème de Cauchy posé.

Exemple 2. Trouver par approximations successives une solution approchée de l'équation $y' = x^2 + y^2$ qui satisfait à la condition initiale $y|_{x=0} = 0$ dans un rectangle $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Solution. On a $|f(x, y)| = x^2 + y^2 \leqslant 2$, c'est-à-dire $M = 2$. Prenons pour h le plus petit des nombres $a = 1$, $b/M = 1/2$, c'est-à-dire $h = 1/2$. Suivant (4), les approximations successives convergeront dans l'intervalle $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Composons-les :

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2)\,dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x [t^2 + y_1^2(t)]\,dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x [t^2 + y_2^2(t)]\,dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3\cdot 63} + \frac{t^{14}}{63^2}\right) dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59\,535}.$$

L'erreur absolue de l'approximation du troisième ordre ne dépasse pas la valeur

$$|y_3(x) - y(x)| \leqslant \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 2^2 = \frac{1}{6}.$$

Ici, $N = \max\limits_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max\limits_D |2y| = 2$.

Remarque. La fonction $f(x, y)$ doit satisfaire à toutes les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy.

L'exemple qui suit [2] montre que la continuité de la fonction $f(x, y)$ ne suffit pas à elle seule pour que les approximations successives soient convergentes.

Soit donnée une fonction $f(x, y)$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, & -\infty < y < +\infty, \\ 2x & \text{pour } 0 < x \leqslant 1, & -\infty < y < 0, \\ 2x - \frac{4y}{x} & \text{pour } 0 < x \leqslant 1, & 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ -2x & \text{pour } 0 < x \leqslant 1, & x^2 < y < +\infty. \end{cases}$$

Sur l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < y < +\infty$, la fonction $f(x, y)$ est continue et bornée par une constante $M = 2$. Pour le point initial $(x, y) = (0, 0)$, les approximations successives pour $0 \leqslant x \leqslant$

$\leqslant 1$ sont de la forme

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x f(x, y_0(x))\,dx = x^2,$$

$$y_2(x) = \int_0^x f(x, x^2)\,dx = \int_0^x \left(2x - \frac{4x^2}{x}\right) dx = -x^2,$$

et en général,

$$y_{2n-1}(x) = x^2, \qquad y_{2n}(x) = -x^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

C'est pourquoi quel que soit $x \neq 0$, la suite $\{y_n(x)\}$ n'a pas de limite, c'est-à-dire que les approximations successives ne convergent pas. Remarquons aussi qu'aucune des sous-suites convergentes $\{y_{2n-1}(x)\}$ et $\{y_{2n}(x)\}$ ne converge vers la solution car

$$y'_{2n-1}(x) = 2x \neq f(x, x^2) = -2x,$$
$$y'_{2n}(x) = -2x \neq f(x, -x^2) = 2x.$$

Dans le cas où les approximations successives convergent, il se peut que la solution obtenue ne soit pas unique comme le montre l'exemple suivant : $y' = y^{1/3}$.

Donnons-nous une condition initiale $y(0) = 0$; alors

$$y(x) = \int_0^x y^{1/3}(t)\,dt.$$

En prenant pour l'approximation d'ordre zéro y_0 la fonction $y_0(x) \equiv 0$, on aura

$$y_1(x) \equiv 0, \qquad y_2(x) \equiv 0, \ldots, y_n(x) \equiv 0, \ldots,$$

si bien que toutes les approximations successives sont nulles et, de ce fait, elles convergent vers une fonction identiquement nulle. D'autre part, la fonction $y(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}$ est aussi solution du problème considéré, existant sur la demi-droite $x \geqslant 0$.

Dans les problèmes suivants, trouver les trois premières approximations :

41. $y' = x^2 - y^2, \qquad y|_{x=-1} = 0.$
42. $y' = x + y^2, \qquad y|_{x=0} = 0.$
43. $y' = x + y, \qquad y|_{x=0} = 1.$
44. $y' = 2y - 2x^2 - 3, \qquad y|_{x=0} = 2.$
45. $xy' = 2x - y, \qquad y|_{x=1} = 2.$

§ 4. Equations à variables séparables et équations s'y ramenant

Une équation différentielle de la forme $\varphi(y)\,dy = f(x)\,dx$ s'appelle *équation à variables séparées.*

Une équation de la forme

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy,$$

dans laquelle les coefficients des différentielles sont des facteurs dépendant de la seule variable x et de la seule variable y est dite *à variables séparables.*

En divisant une telle équation par le produit $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ on la ramène à une équation à variables séparées:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy.$$

L'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx - \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = C.$$

Remarque. La division par $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ peut provoquer la perte de solutions particulières qui annulent le produit $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$. ◆

Une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

où a, b et c sont des constantes, se ramène par le changement de variables $z = ax + by + c$ à une équation à variables séparables.

Exemple 1. Soit à résoudre l'équation

$$3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0.$$

Solution. Divisons les deux membres de l'équation par le produit $\operatorname{tg} y \cdot (2 - e^x)$, il vient

$$\frac{3e^x\,dx}{2 - e^x} + \frac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y} = 0.$$

Nous avons obtenu une équation à variables séparées. En l'intégrant, on trouve

$$-3 \ln |2 - e^x| + \ln |\operatorname{tg} y| = C_1.$$

L'exponentiation donne

$$\frac{|\operatorname{tg} y|}{|2 - e^x|^3} = e^{C_1}, \text{ ou } \left|\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3}\right| = e^{C_1},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1}.$$

En désignant $\pm e^{C_1} = C$, on aura

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3} = C, \text{ ou } \operatorname{tg} y - C(2-e^x)^3 = 0.$$

Nous avons obtenu l'intégrale générale de l'équation donnée.

En divisant par le produit $\operatorname{tg} y \cdot (2 - e^x)$, on supposait qu'aucun multiplicateur ne s'annulait. En annulant chacun des multiplicateurs on obtient respectivement

$$y = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad x = \ln 2.$$

Une substitution directe dans l'équation initiale montre que $y = k\pi$ et $x = \ln 2$ sont solutions de cette équation. Ces solutions peuvent être obtenues formellement à partir de l'intégrale générale pour $C = 0$ et $C = \infty$. Cette dernière circonstance signifie que la constante C est remplacée par $1/C_2$, après quoi l'intégrale générale prend la forme

$$\operatorname{tg} y - \frac{1}{C_2}(2-e^x)^3 = 0, \text{ ou } C_2 \operatorname{tg} y - (2-e^x)^3 = 0.$$

En posant dans la dernière égalité $C_2 = 0$, ce qui correspond à $C = \infty$, on aura $(2 - e^x)^3 = 0$, d'où on obtient une solution $x = \ln 2$ de l'équation initiale. Ainsi, la fonction $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et $x = \ln 2$ sont des solutions particulières de l'équation donnée. La réponse définitive sera donc

$$\operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0.$$

Exemple 2. Trouver une solution particulière de l'équation

$$(1 + e^x)\, yy' = e^x$$

qui satisfait à la condition initiale $y|_{x=0} = 1$.

Solution. On a

$$(1+e^x)\, y \frac{dy}{dx} = e^x.$$

En séparant les variables, on obtient

$$y\, dy = \frac{e^x\, dx}{1+e^x}.$$

En intégrant, on trouve l'intégrale générale

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C. \tag{1}$$

En posant dans (1) $x = 0$ et $y = 1$ on aura

$$1/2 = \ln 2 + C, \text{ d'où } C = 1/2 - \ln 2.$$

En portant dans (1) la valeur trouvée de C on obtient une solution particulière

$$y^2 = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Puisque de la condition initiale il résulte que $y > 0$ ($y\,|_{x=0} = 1 > 0$), prenons le signe plus devant le radical. Ainsi, la solution particulière cherchée est

$$y = \sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Exemple 3. Trouver les solutions particulières de l'équation

$$y' \sin x = y \ln y$$

qui satisfont aux conditions initiales:

$$\text{a)}\ y\,|_{x=\pi/2} = e; \qquad \text{b)}\ y\,|_{x=\pi/2} = 1.$$

Solution. On a

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y.$$

Séparons les variables, il vient

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

En intégrant, on trouve l'intégrale générale

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C.$$

L'exponentiation donne

$$\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{ou} \quad y = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

ce qui est la solution générale de l'équation initiale.

a) Posons $x = \pi/2$, $y = e$, alors $e = e^{C \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, d'où $C = 1$. La solution particulière cherchée est $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

b) en posant dans la solution générale $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, on aura $1 = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, d'où $C = 0$. La solution particulière cherchée est $y \equiv 1$.

Remarquons que lors de l'obtention de la solution générale la constante C était placée sous le signe logarithme et donc $C = 0$ doit être considérée comme une valeur limite. Cette solution particulière $y = 1$ figure parmi les zéros du produit $y \ln y \sin x$ par lequel nous avons divisé les deux membres de l'équation donnée.

Exemple 4. Trouver l'équation d'une courbe passant par le point (0, —2) et telle que la pente de la tangente en chaque point soit égale à l'ordonnée de ce point augmentée de 3 unités.

Solution. En partant de la signification géométrique de la dérivée première, on obtient l'équation différentielle de la famille de courbes qui satisfont à la condition énoncée dans le problème, à savoir

$$\frac{dy}{dx} = y + 3.$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient la solution générale

$$y = Ce^x - 3. \tag{2}$$

Puisque la courbe cherchée doit passer par le point (0, —2), c'est-à-dire $y|_{x=0} = -2$, on déduit de (2) pour $x = 0$ que $-2 = C - 3$, d'où $C = 1$. La courbe cherchée sera définie par l'équation

$$y = e^x - 3.$$

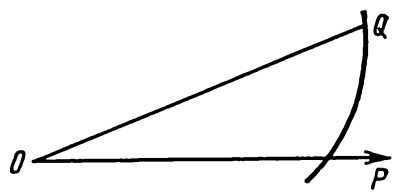

Fig. 11

Exemple 5. Trouver la courbe telle que la longueur de son arc compris entre deux points quelconques P et Q soit proportionnelle à la différence des distances des points P et Q à un point fixe O.

Solution. Si l'on fixe le point P, la variation de l'arc QP sera proportionnelle à la différence entre OQ et la constante OP. Introduisons des coordonnées polaires en prenant le point O pour pôle et OP pour axe polaire (fig. 11). La différentielle d'un arc de courbe en coordonnées polaires est

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\varphi)^2.$$

On en tire pour le problème considéré

$$k^2(dr)^2 = (dr)^2 + (r\,d\varphi)^2, \text{ ou } d\varphi = \sqrt{k^2-1}\,\frac{dr}{r} = \frac{1}{a}\,\frac{dr}{r}.$$

En intégrant, on trouve $r = Ce^{a\varphi}$ (une spirale logarithmique).

Exemple 6. Admettons que la vitesse de dissolution isotherme (à température constante) d'un corps solide dans un liquide soit proportionnelle à la quantité de cette substance pouvant encore se dissoudre dans le liquide jusqu'à la saturation de ce dernier (on suppose qu'entre le solvant et le soluté il n'y a pas de réaction chimique et que la solution est loin d'être saturée, sinon la vitesse de dissolution ne suit pas une loi linéaire). Déterminer la variation en fonction du temps de la quantité de la substance dissoute.

Solution. Soient P la quantité de la substance assurant la saturation de la solution et x la quantité de la substance déjà dissoute.

Alors on peut écrire l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

où k est un coefficient de proportionnalité connu par expérience et t, le temps. En séparant les variables, on trouve

$$\frac{dx}{P - x} = k\,dt.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|x - P| = \ln C - kt, \quad \text{d'où} \quad x = P + C\,e^{-kt}.$$

A l'instant initial $t = 0$ on a $x = 0$ et donc $C = -P$, si bien qu'en définitive on a

$$x = P(1 - e^{-kt}).$$

Exemple 7. Un récipient de forme cylindrique de volume V_0 est rempli d'air atmosphérique qui est comprimé adiabatiquement (sans échange de chaleur avec le milieu ambiant) jusqu'à un volume V_1. Calculer le travail de compression.

Solution. On sait qu'une transformation adiabatique se décrit par l'équation de Poisson

$$p/p_0 = (V_0/V)^k, \tag{3}$$

où V_0 est le volume initial du gaz; p_0, la pression initiale du gaz; k, une constante caractéristique du gaz donné. Désignons par V et p respectivement le volume et la pression du gaz à l'instant où le piston se trouvait à une hauteur h, et par S, la surface du piston. Alors la descente du piston d'une quantité dh provoquera une diminution du volume de gaz d'une quantité $dV = S\,dh$. Le travail produit par le déplacement du piston sera

$$dW = -pS\,dh, \text{ ou } dW = -p\,dV. \tag{4}$$

En portant dans (4) la valeur de p tirée de (3) on obtient l'équation différentielle de cette transformation

$$dW = -\frac{p_0 V_0^k}{V^k}\,dV.$$

L'intégration de cette équation donnera

$$W = -p_0 V_0^k \int \frac{dV}{V^k} = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)V^{k-1}} + C, \qquad k \neq 1. \tag{5}$$

En utilisant la condition initiale $W|_{V=V_0} = 0$, on tire de (5)

$$C = -p_0 V_0/(k - 1).$$

Ainsi, le travail de compression adiabatique (de V_0 à V) aura pour expression

$$W=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}-1\right].$$

Pour $V = V_1$ on obtient

$$W_1=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}-1\right].$$

Exemple 8. Trouver une solution de l'équation

$$x^3 \sin y\cdot y' = 2 \tag{6}$$

qui satisfait à la condition

$$y \to \frac{\pi}{2} \text{ pour } x \to \infty. \tag{7}$$

Solution. En séparant les variables et en intégrant, on trouve l'intégrale générale de l'équation (6):

$$\cos y=\frac{1}{x^2}+C.$$

La condition (7) donne $\cos\frac{\pi}{2}=C$, c'est-à-dire $C = 0$, de sorte que l'intégrale particulière sera de la forme $\cos y = 1/x^2$. A cette intégrale correspond une infinité de solutions particulières de la forme

$$y=\pm\arccos\frac{1}{x^2}+2\pi n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8}$$

Parmi ces solutions il n'y a qu'une seule qui satisfasse à la condition (7). Cherchons cette solution en passant à la limite pour $x \to \infty$ dans l'égalité (8):

$$\frac{\pi}{2}=\pm\arccos 0+2\pi n, \text{ ou } \frac{\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

d'où

$$\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}+2n. \tag{9}$$

Il est facile d'établir que l'équation (9) possède deux racines; $n = 0$ et $n = 1/2$ dont la seconde $n = 1/2$ correspondant au signe moins de $\arccos\frac{1}{x^2}$ ne convient pas (n doit être un nombre entier ou nul). Ainsi, la solution particulière cherchée de l'équation (6) sera

$$y=\arccos\frac{1}{x^2}.$$

Intégrer les équations suivantes:

46. $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0.$

47. $(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0.$

48. $y'\sin x-y\cos x=0,\ \ y\,|_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$

49. $(1+y^2)\,dx=x\,dy.$

50. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

51. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0,\ \ y\,|_{x=0}=1.$

52. $e^{-y}(1+y')=1.$

53. $y\ln y\,dx+x\,dy=0,\ \ y\,|_{x=1}=1.$

54. $y'=a^{x+y}\ \ (a>0,\ a\neq 1).$

55. $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0.$

56. $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2).$

57. $e^x\sin^3 y+(1+e^{2x})\cos y\cdot y'=0.$

58. $y^2\sin x\,dx+\cos^2 x\ln y\,dy=0.$

59. $y'=\sin(x-y).$

60. $y'=ax+by+c\ \ (a,\ b,\ c-\text{const}).$

61. $(x+y^2)\,y'=a^2.$

62. $y+xy'=a(1+xy),\ \ y\,|_{x=\frac{1}{a}}=-a.$

63. $(a^2+y^2)\,dx+2x\sqrt{ax-x^2}\,dy=0,\ \ y\,|_{x=a}=0.$

64. $y+\sin(x-y)=\sin(x+y),\ \ y\,|_{x=\pi}=\frac{\pi}{2}.$

65. Trouver la courbe qui passe par le point (0, —2) et telle que le coefficient angulaire de la tangente en chaque point soit égal à trois fois l'ordonnée de ce point.

66. Trouver une courbe pour laquelle l'aire Q de la surface comprise entre cette courbe, l'axe Ox et les deux ordonnées $X=0$, $X=x$ est une fonction donnée de y: $Q=a^2\ln(y/a)$.

67. Un point matériel de masse 1 g est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force directement proportionnelle au temps compté depuis l'instant $t=0$ et inversement proportionnelle à la vitesse de déplacement du point. A l'instant $t=10$ s la vitesse était égale à 50 cm/s et la force à 4 dynes. Quelle sera la vitesse du point au bout d'une minute après le commencement du mouvement?

68. Démontrer que la courbe telle que toutes ses normales passent par un point fixe est une circonférence.

69. Une balle pénètre dans une planche d'épaisseur $h = 10$ cm avec une vitesse $v_0 = 200$ m/s et, l'ayant traversée, en sort avec une vitesse $v_1 = 80$ m/s. En admettant que la force de résistance que la planche oppose au mouvement de la balle est proportionnelle au carré de la vitesse de mouvement, déterminer le temps mis par la balle pour traverser la planche.

70. Un navire ralentit son mouvement sous l'action de la force de résistance de l'eau qui est proportionnelle à sa vitesse. La vitesse du navire est égale à 10 m/s à l'instant initial et à 8 m/s au bout de 5 s. Quand la vitesse s'abaissera-t-elle à 1 m/s ?

71. Démontrer que la courbe dont le coefficient angulaire est en tout point proportionnel à l'abscisse du point de contact est une parabole.

72. D'après la loi de Newton la vitesse de refroidissement d'un corps placé dans l'air est proportionnelle à la différence entre la température T du corps et la température T_0 de l'air ambiant. Sachant que la température de l'air est égale à 20 °C et que durant 20 mn le corps se refroidit de 100 à 60°, calculer le temps au bout duquel la température du corps s'abaissera à 30°.

73. Trouver la courbe telle que le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque soit égal à n fois le coefficient angulaire de la droite reliant ce point à l'origine des coordonnées.

74. Déterminer le trajet S parcouru par un corps pendant le temps t sachant que sa vitesse est proportionnelle au trajet parcouru et que le corps parcourt 100 m en 10 s et 200 m en 15 s.

75. Le fond d'un réservoir ayant une capacité de 300 litres est recouvert de sel. En admettant que la vitesse de dissolution du sel est proportionnelle à la différence entre la concentration à l'instant donné et la concentration de la solution saturée (1 kg de sel par 3 l d'eau) et qu'une quantité donnée d'eau pure dissout 1/3 kg de sel en une minute, calculer la quantité de sel que contiendra la solution au bout de 1 h.

76. Une certaine quantité de substance indissoluble contient dans ses pores 10 kg de sel. En la soumettant à l'action de 90 l d'eau on a constaté que durant 1 h la moitié du sel est passée dans la solution. Quelle quantité de sel serait dissoute pendant le même temps si la quantité d'eau était doublée ? La vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité de sel non dissout et à la différence entre la concentration de la solution à l'instant donné et la concentration de la solution saturée (1 kg de sel par 3 l d'eau).

77. Trouver la courbe telle que le tronçon de tangente à cette courbe compris entre les axes de coordonnées se divise en deux parties égales au point de contact.

78. Une certaine quantité de substance contenant 3 kg d'humidité est placée dans une pièce de 100 m^3 de volume dont l'air se caractérise par un taux d'humidité égal à 25 %. A la même tempé-

rature, l'air saturé contient 0,12 kg d'humidité par 1 m³. Sachant qu'au cours des premières 24 heures la substance a perdu la moitié de son humidité, calculer la quantité d'humidité qu'elle conservera au bout de 24 heures suivantes.

Indication. L'humidité contenue dans une substance poreuse s'évapore dans le milieu ambiant avec une vitesse proportionnelle à la quantité d'humidité contenue dans la substance donnée ainsi qu'à la différence de taux d'humidité de l'air ambiant et de l'air saturé.

79. Une certaine quantité de substance indissoluble contenant dans ses pores 2 kg de sel est soumise à l'action de 30 l d'eau. Au bout de 5 mn, 1 kg de sel passe en solution. Au bout de quel temps seront dissous 99 % de la quantité initiale du sel ?

80. Soit une muraille épaisse de 30 cm. Trouver la variation de la température en fonction de la distance du point à la surface extérieure de la muraille sachant que la température est égale à 20° sur la surface intérieure et à 0° sur la surface extérieure de la muraille. Calculer aussi la quantité de chaleur que la muraille cède (par 1 cm²) au milieu ambiant pendant 24 heures.

Indication. D'après la loi de Newton, la vitesse Q avec laquelle la chaleur se propage à travers un élément de surface A perpendiculaire à l'axe Ox est donnée par $Q = -kS\frac{dT}{dt}$, où k est le coefficient de conductibilité thermique de la substance donnée ($k = 0{,}0015$); T, la température; t, le temps; S, l'aire de la surface A.

81. Montrer que pour la condition initiale $y|_{x=0} = 0$ l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ admet une infinité de solutions de la forme $y = Cx$. Pour la condition initiale $y|_{x=0} = y_0 \neq 0$ la même équation n'a aucune solution. Construire les courbes intégrales.

82. Montrer que le problème $\frac{dy}{dx} = y^\alpha$, $y|_{x=0} = 0$, possède au moins deux solutions pour $0 < \alpha < 1$ et une solution pour $\alpha = 1$. Construire les courbes intégrales pour $\alpha = 1/2$, 1.

83. Trouver une solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = y\,|\ln y|^\alpha$, $\alpha > 0$, qui satisfait à la condition initiale $y|_{x=0} = 0$. Ce problème pour quelles valeurs de α a-t-il l'unique solution ?

84. Montrer que les tangentes à toutes les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' + y \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x + 1$ en les points de leur intersection avec l'axe Oy sont parallèles. Déterminer l'angle sous lequel les courbes intégrales coupent l'axe Oy.

Intégrer les équations suivantes:

85. $\cos y' = 0$.
86. $e^{y'} = 1$.
87. $\sin y' = x$.
88. $\ln y' = x$.
89. $\operatorname{tg} y' = 0$.
90. $e^{y'} = x$.
91. $\operatorname{tg} y' = x$.

Dans les problèmes suivants, trouver des solutions des équations qui satisfont aux conditions indiquées:

92. $x^2y'\cos y + 1 = 0$, $y \to \frac{16}{3}\pi$, $x \to +\infty$.

93. $x^2y' + \cos 2y = 1$, $y \to \frac{10}{3}\pi$, $x \to +\infty$.

94. $x^3y' - \sin y = 1$, $y \to 5\pi$, $x \to \infty$.

95. $(1 + x^2)\, y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, $y \to \frac{7}{2}\pi$, $x \to -\infty$.

96. $e^y = e^{4y}y' + 1$, y est borné pour $x \to +\infty$.

97. $(x + 1)\, y' = y - 1$, y est borné pour $x \to +\infty$.

98. $y' = 2x(\pi + y)$, y est borné pour $x \to \infty$.

99. $x^2y' + \sin 2y = 1$, $y \to \frac{11}{4}\pi$, $x \to +\infty$.

§ 5. Equations homogènes et équations s'y ramenant

1°. Equations homogènes. Une fonction $f(x, y)$ s'appelle *fonction homogène* de ses arguments, de degré n, si elle vérifie l'identité $f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$.

Par exemple, la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est une fonction homogène du deuxième degré car $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + y^2 - xy) = t^2 f(x, y)$.

Pour $n = 0$ on a une fonction de degré zéro. Par exemple la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est une fonction homogène de degré zéro car

$$f(x, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Une équation différentielle de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ est dite *homogène* par rapport à x et y lorsque la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de ses arguments de degré zéro. Une équation homogène peut se mettre toujours sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

En introduisant une nouvelle fonction inconnue $u = y/x$ on peut ramener l'équation (1) à une équation à variables séparables :

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Si $u = u_0$ est racine de l'équation $\varphi(u) - u = 0$, la solution de l'équation homogène sera $u = u_0$ ou $y = u_0 x$ (une droite passant par l'origine des coordonnées).

Remarque. Pour résoudre les équations homogènes il n'est pas obligatoire de les ramener à la forme (1). On peut effectuer directement la substitution $y = ux$.

Exemple 1. Résoudre l'équation $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Solution. Mettons cette équation sous la forme

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

de manière qu'elle devient homogène par rapport à x et y. Posons $u = y/x$ ou $y = ux$. Alors, $y' = xu' + u$. En portant les expressions de y et y' dans l'équation, on obtient

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Séparons les variables

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Intégrons, il vient

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1 \ (C_1 > 0) \text{ ou } \arcsin u = \ln C_1|x|.$$

En tenant compte du fait que $C_1|x| = \pm C_1 x$ et en désignant $\pm C_1 = C$, on obtient $\arcsin u = \ln Cx$, où $|\ln Cx| \leqslant \pi/2$ ou $e^{-\pi/2} \leqslant Cx \leqslant e^{\pi/2}$. En remplaçant u par y/x, on aura l'intégrale générale

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx.$$

On en tire la solution générale : $y = x \sin \ln Cx$.

En séparant les variables nous avons divisé les deux membres de l'équation par le produit $x\sqrt{1-u^2}$ et donc nous avons pu perdre des solutions qui annulent ce produit.

Posons maintenant $x = 0$ et $\sqrt{1-u^2} = 0$. Mais $x \neq 0$ en raison de la substitution $u = y/x$ et de la relation $\sqrt{1-u^2} = 0$ il résulte que $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, d'où $y \neq \pm x$. Par une vérification directe on s'assure que les fonctions $y = -x$ et $y = x$ sont aussi solutions de l'équation donnée.

Exemple 2. Considérer la famille de courbes intégrales C_α de l'équation homogène

$$y' = \varphi(y/x). \tag{2}$$

Montrer qu'en des points homologues *) les tangentes aux courbes définies par l'équation homogène (2) sont parallèles.

Solution. De par la définition même des points homologues on a $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$ si bien qu'en raison de l'équation (2)

$$y' = y_1',$$

où y' et y_1' sont des coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales C_α et C_{α_1} aux points M et M_1 respectivement (fig. 12).

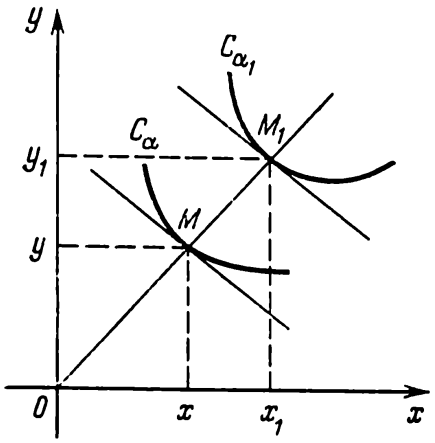

Fig. 12

Intégrer les équations suivantes:

100. $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$.

101. $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$.

102. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

103. $x^2\,dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx$.

104. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

105. $2x^2y' = x^2 + y^2$.

106. $(4x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$.

107. $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$.

2°. Equations se ramenant aux équations homogènes.

A. Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{3}$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des constantes et $f(u)$ est une fonction continue de son argument u.

Si $c = c_1 = 0$, l'équation (3) est homogène et peut donc être intégrée comme il est indiqué plus haut.

Lorsque l'un au moins des nombres c, c_1 est différent de zéro, il convient de distinguer deux cas.

1) Le determinant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En introduisant les nouvelles variables ξ et η définies par les formules $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, où h et k sont pour l'instant des constantes indéterminées, on ramène l'équation (3) à la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}\right).$$

*) Nous appellerons *points homologues* ceux des points des courbes C_α qui se situent sur un même rayon issu de l'origine des coordonnées.

En choisissant h et k comme solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \quad (\Delta \neq 0), \tag{4}$$

on obtient une équation homogène

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right).$$

En recherchant son intégrale générale et en y remplaçant ξ par $x-h$ et η par $y-k$, on obtient l'intégrale générale de l'équation (3).

2) Le déterminant $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0.$

Dans le cas général le système (4) n'a pas de solutions de sorte que la méthode exposée plus haut n'est pas applicable ; dans ce cas $\frac{a_1}{a}=$ $=\frac{b_1}{b}=\lambda$ et par suite l'équation (2) prend la forme

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

La substitution $z=ax+by$ ramène cette équation à une équation à variables séparables.

Exemple 3. Résoudre l'équation

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0. \tag{5}$$

Solution. Considérons un système d'équations algébriques linéaires

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y+4=0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Le système admet une solution unique $x_0=-1$, $y_0=3$. Faisons le changement de variables $x=\xi-1$, $y=\eta+3$. L'équation (5) devient

$$(\xi+\eta)\,d\xi+(\xi-\eta)\,d\eta=0. \tag{6}$$

L'équation (6) est homogène. En posant $\eta=u\xi$, on obtient

$$(\xi+\xi u)\,d\xi+(\xi-\xi u)(\xi\,du+u\,d\xi)=0,$$

d'où

$$(1+2u-u^2)\,d\xi+\xi(1-u)\,du=0.$$

Séparons les variables,

$$\frac{d\xi}{\xi}+\frac{1-u}{1+2u-u^2}\,du=0.$$

Intégrons, il vient

$$\ln|\xi|+\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2|=\ln C,\ \text{ou}\ \xi^2(1+2u-u^2)=C.$$

Revenons aux variables x, y:

$$(x+1)^2\left[1+2\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right]=C_1,$$

ou encore

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y=C\ (C=C_1+14).$$

Exemple 4. Résoudre l'équation $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.

Solution. Le système d'équations algébriques linéaires

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$$

est incompatible. Dans ce cas la méthode utilisée dans l'exemple précédent ne peut pas s'appliquer. Pour intégrer cette équation, effectuons la substitution $x+y=z$, $dy=dz-dx$. L'équation prend la forme

$$(2-z)\,dx+(2z-1)\,dz=0.$$

En séparant les variables, on obtient

$$dx-\frac{2z-1}{z-2}\,dz=0,\ \text{d'où}\ x-2z-3\ln|z-2|=C.$$

En revenant aux variables x, y, on obtient l'intégrale générale de l'équation donnée $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

Résoudre les équations suivantes:

108. $x+y-2+(1-x)\,y'=0$.

109. $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$.

110. $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$.

111. $(x+y)\,dx+(x-y-2)\,dy=0$.

112. $2x+3y-5+(3x+2y-5)\,y'=0$.

113. $8x+4y+1+(4x+2y+1)\,y'=0$.

114. $(x-2y-1)\,dx+(3x-6y+2)\,dy=0$.

115. $(x+y)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$.

B. Parfois une équation peut être ramenée à une équation homogène par le changement de variable $y=z^\alpha$. On peut le faire dans

le cas où tous les termes figurant dans l'équation sont de même degré, en attribuant à la variable x le degré 1, à la variable y le degré α et à la dérivée $\frac{dy}{dx}$ le degré $\alpha - 1$.

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$(x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0. \tag{7}$$

Solution. Effectuons la substitution $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$, où α est pour l'instant un nombre arbitraire que nous choisirons plus tard. En portant dans l'équation les expressions de y et de dy, on obtient

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\,\alpha z^{\alpha-1}\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0,$$

ou encore

$$(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\,\alpha\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0.$$

Remarquons que $x^2z^{3\alpha-1}$ est de degré $2 + 3\alpha - 1 = 3\alpha + 1$ alors que $z^{\alpha-1}$ est de degré $\alpha - 1$ et $xz^{3\alpha}$ de degré $1 + 3\alpha$. L'équation obtenue sera homogène si tous les termes sont de même degré, c'est-à-dire si est satisfaite la condition $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ ou $\alpha = -1$.

Posons $y = 1/z$; l'équation initiale prend la forme

$$\left(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4}\right) dz + 2\,\frac{x}{z^3}\,dx = 0,$$

ou

$$(z^2 - x^2)\,dz + 2zx\,dx = 0.$$

Posons maintenant $z = ux$, $dz = u\,dx + x\,du$. Alors, cette équation devient $(u^2 - 1)(u\,dx + x\,du) + 2u\,dx = 0$, d'où

$$u(u^2 + 1)\,dx + x(u^2 - 1)\,du = 0.$$

Séparons les variables dans cette dernière équation, il vient

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u^3 + u}\,du = 0.$$

En intégrant, on trouve

$$\ln|x| + \ln(u^2 + 1) - \ln|u| = \ln C, \text{ ou } \frac{x(u^2+1)}{u} = C.$$

En remplaçant u par $1/xy$, on obtient l'intégrale générale de l'équation donnée

$$1 + x^2y^2 = Cy.$$

L'équation (7) a encore une solution évidente $y = 0$ qui est obtenue à partir de l'intégrale générale pour $C \to \infty$ si on écrit cette intégrale sous la forme $y = (1 + x^2y^2)/C$ et on passe à la limite pour $C \to \infty$. Ainsi, la fonction $y = 0$ est une solution particulière de l'équation initiale.

Intégrer les équations suivantes:

116. $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0.$

117. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'.$

118. $y(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1})\,dx + 2x\,dy = 0.$

119. $(x + y^3)\,dx + 3(y^3 - x)\,y^2\,dy = 0.$

120. Trouver la courbe telle que la perpendiculaire abaissée depuis l'origine des coordonnées sur la tangente soit égale à l'abscisse du point de contact.

121. Trouver la courbe telle que le rapport du segment coupé sur l'axe Oy par la tangente au rayon vecteur soit égal à une constante.

122. En utilisant des coordonnées rectangulaires, trouver la forme d'un miroir réfléchissant parallèlement à une direction donnée tous les rayons issus d'un point donné.

123. Trouver l'équation de la courbe pour laquelle la longueur du segment coupé sur l'axe des ordonnées par la normale menée à un point quelconque de la courbe est égale à la distance de ce point à l'origine des coordonnées.

124. Trouver l'équation de la courbe pour laquelle le produit de l'abscisse d'un point quelconque par la valeur du segment coupé par la normale sur l'axe Oy est égal au double carré de la distance de ce point à l'origine des coordonnées.

§ 6. Equations différentielles linéaires du premier ordre. Equation de Bernoulli

1°. Equations linéaires du premier ordre. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x), \tag{1}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions données de x, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (1).

Si $q(x) \equiv 0$ on dit que l'équation (1) est *linéaire homogène*. C'est une équation à variables séparables ayant pour solution générale

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

La recherche de la solution générale d'une équation non homogène peut se faire par la *méthode de variation de la constante arbitraire* qui consiste en ce que la solution de l'équation (1) est cherchée sous la forme

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)dx},$$

où $C(x)$ est une nouvelle fonction inconnue de x.

Exemple 1. Résoudre l'équation

$$y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}. \tag{2}$$

Solution. Appliquons la méthode de variation de la constante. Considérons l'équation homogène

$$y' + 2xy = 0$$

associée à l'équation non homogène donnée. C'est une équation à variables séparables. Sa solution générale est de la forme

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme

$$y = C(x)\,e^{-x^2}, \tag{3}$$

où $C(x)$ est une fonction inconnue de x. En portant (3) dans (2), on obtient $C(x) = 2x$, d'où $C(x) = x^2 + C$. Ainsi, la solution générale de l'équation non homogène sera

$$y = (x^2 + C)\,e^{-x^2},$$

où C est une constante d'intégration.

Remarque. Il se peut qu'une équation différentielle puisse être aussi linéaire en x en tant que fonction de y. La forme normale d'une telle équation est

$$\frac{dx}{dy} + r(y)\,x = \varphi(y).$$

Exemple 2. Résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

Solution. Cette équation est linéaire si x est considéré comme une fonction de y:

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y. \tag{4}$$

Appliquons la méthode de variation de la constante arbitraire. Commençons par résoudre l'équation homogène associée

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = 0$$

qui est une équation à variables séparables. Sa solution générale est de la forme

$$x = Ce^{\sin y}, \qquad C = \text{const}.$$

Cherchons la solution générale de l'équation (4) sous la forme

$$x = C(y)\,e^{\sin y}, \tag{5}$$

où $C(y)$ est une fonction inconnue de y. En portant (5) dans (4), on obtient

$$C'(y)\,e^{\sin y}+C(y)\,e^{\sin y}\cos y-C(y)\,e^{\sin y}\cos y=\sin 2y,$$

ou

$$C'(y)=e^{-\sin y}\sin 2y.$$

Intégrons par parties, il vient

$$C(y)=\int e^{-\sin y}\sin 2y\,dy=2\int e^{-\sin y}\cos y\sin y\,dy=$$

$$=2\int \sin y\,d(-e^{-\sin y})=2(-\sin y e^{-\sin y}+$$

$$+\int e^{-\sin y}\cos y\,dy)=2(-\sin y e^{-\sin y}-e^{-\sin y})+C;$$

ainsi,

$$C(y)=-2e^{-\sin y}(1+\sin y)+C. \tag{6}$$

En portant (6) dans (5), on obtient la solution générale de l'équation (4) et par suite celle de l'équation donnée:

$$x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y). \blacklozenge$$

L'équation (1) peut aussi être intégrée comme suit. Posons

$$y=u(x)\,v(x), \tag{7}$$

où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions inconnues de x dont l'une, par exemple $v(x)$, peut être choisie arbitrairement. En portant (7) dans (1), on obtient, toutes les réductions effectuées,

$$vu'+(pv+v')\,u=q(x). \tag{8}$$

En déterminant $v(x)$ de la condition $v'+pv=0$, on trouve ensuite de (8) la fonction $u(x)$ et, par suite, la solution $y=uv$ de l'équation (1). Pour $v(x)$ on peut prendre toute solution particulière de l'équation $v'+pv=0$, $v\not\equiv 0$.

Exemple 3. Résoudre le problème de Cauchy:

$$x(x-1)\,y'+y=x^2(2x-1), \tag{9}$$

$$y\,|_{x=2}=4. \tag{10}$$

Solution. Cherchons la solution générale de l'équation (9) sous la forme

$$y=u(x)\,v(x);$$

on a $y'=u'v+uv'$.

En portant les expressions de y et y' dans (9), on aura

$$x(x-1)(u'v+uv')+uv=x^2(2x-1),$$

ou

$$x(x-1)\,vu' + [x(x-1)\,v' + v]\,u = x^2(2x-1). \qquad (11)$$

La fonction $v = v(x)$ se détermine de la condition $x(x-1)\,v' + v = 0$. En prenant l'une quelconque des solutions particulières de la dernière équation, par exemple $v = \frac{x}{x-1}$, et en la portant dans (11), on obtient l'équation $u' = 2x - 1$ qui permet de trouver la fonction $u(x) = x^2 - x + C$. Par suite, la solution générale de l'équation (9) sera

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1}, \text{ ou } y = \frac{Cx}{x-1} + x^2.$$

En utilisant la condition initiale (10), on obtient, pour déterminer C, l'équation $4 = C\frac{2}{2-1} + 2^2$, d'où $C = 0$; la solution du problème de Cauchy posé sera donc

$$y = x^2.$$

Exemple 4. On sait que l'intensité de courant i et la force électromotrice E dans un circuit présentant une résistance R et une inductance L sont liées par la relation $E = Ri + L\frac{di}{dt}$, où R et L sont des constantes. Si E est considérée comme une fonction du temps t, on obtient pour l'intensité de courant i une équation linéaire non homogène

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{E(t)}{L}.$$

Déterminer l'intensité de courant $i(t)$ dans le cas où $E = E_0 = \text{const}$ et $i(0) = I_0$.

Solution. On a

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{E_0}{L}, \qquad (12)$$

$$i(0) = I_0. \qquad (13)$$

La solution générale de l'équation (12) est de la forme

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (14)$$

En tenant compte de la condition initiale (13), on déduit de (14) que $C = I_0 - \frac{E_0}{R}$; par suite la solution cherchée sera

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

On voit que lorsque le temps $t \to +\infty$, l'intensité de courant $i(t)$ tend vers une valeur constante E_0/R.

Exemple 5. Soit donnée une famille C_α de courbes intégrales d'une équation linéaire non homogène $y' + p(x)\,y = q(x)$.

Montrer qu'en des points homologues *) les tangentes aux courbes C_α définies par l'équation linéaire donnée se coupent en un seul et même point (fig. 13).

Solution. Considérons la tangente à une courbe C_α quelconque en un point tel que $M(x, y)$. L'équation de la tangente au point $M(x, y)$ est de la forme

$$\eta - q(x)(\xi - x) = y\,[1 - p(x)(\xi - x)],$$

où ξ, η sont des coordonnées courantes d'un point sur la tangente. Par définition, x est une constante aux points homologues et y est une variable. En prenant deux tangentes quelconques aux courbes C_α en des points homologues, on obtient pour les coordonnées de leur point d'intersection S:

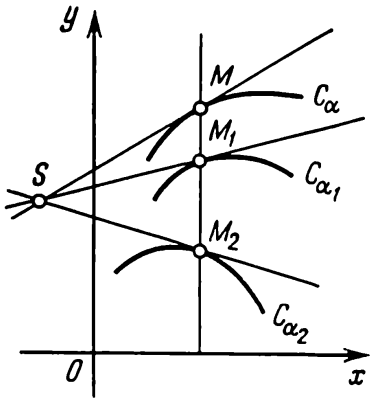

Fig. 13

$$\xi = x + \frac{1}{p(x)}, \qquad \eta = +\frac{q(x)}{p(x)}. \quad (15)$$

Il en résulte immédiatement que toutes les tangentes aux courbes C_α en des points homologues (x fixé) se coupent en un seul et même point

$$S\left(x + \frac{1}{p(x)},\ +\frac{q(x)}{p(x)}\right).$$

L'élimination de l'argument x entre les équations du système (15) donne l'équation du lieu géométrique des points S: $f(\xi, \eta) = 0$.

Exemple 6. Trouver une solution de l'équation $y' - y = \cos x - \sin x$ qui satisfait à la condition: y est borné pour $x \to +\infty$.

Solution. La solution générale de cette équation est

$$y = Ce^x + \sin x.$$

Toute solution de l'équation obtenue à partir de la solution générale pour $C \neq 0$ sera non bornée car pour $x \to +\infty$ la fonction $\sin x$ est bornée et $e^x \to +\infty$. On en déduit que l'équation donnée possède l'unique solution $y = \sin x$ bornée pour $x \to +\infty$ qui est obtenue à partir de la solution générale pour $C = 0$.

Résoudre les équations linéaires suivantes. Résoudre là où il est indiqué le problème de Cauchy:

125. $y' + 2y = e^{-x}$.

126. $x^2 + xy' = y$, $y\,|_{x=1} = 0$.

*) On appelle *points homologues* des courbes C_α ceux qui sont situés sur une même droite parallèle à l'axe des ordonnées.

127. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

128. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

129. $y' \cos x - y \sin x = 2x$, $y|_{x=0} = 0$.

130. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

131. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$, $y|_{x=0} = 0$.

132. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

133. $(2x - y^2)\, y' = 2y$.

134. $y' + y \cos x = \cos x$, $y|_{x=0} = 1$.

135. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$.

136. $(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy)\, dy - dx = 0$.

137. $y' - ye^x = 2xe^{e^x}$.

138. $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$.

139. Déterminer l'intensité de courant $i(t)$ sachant que $E(t) = E_0 \sin 2\pi nt$, $i(0) = I_0$, où E_0, $I_0 = \text{const}$.

140. Un condensateur de capacité Q est intercalé dans un circuit présentant une résistance R et mis sous une tension E. Déterminer la charge q du condensateur à l'instant t après la mise sous tension.

141. Un point matériel de masse m est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force proportionnelle au temps (le coefficient de proportionnalité est k_1). En outre, il subit une résistance de la part du milieu dont la valeur est proportionnelle à sa vitesse (le coefficient de proportionnalité est k_2). Trouver la variation de la vitesse en fonction du temps si à l'instant initial la vitesse est nulle.

142. Trouver l'équation des courbes telles que le segment que la tangente à la courbe en tout point coupe sur l'axe Oy soit égal au carré de l'abscisse du point de contact.

143. Trouver l'équation de la courbe telle que le segment coupé par la tangente sur l'axe des ordonnées soit égal à la demi-somme des coordonnées du point de contact.

144. Trouver la solution générale de l'équation linéaire non homogène du premier ordre $y' + p(x)\, y = q(x)$ connaissant l'une de ses solutions particulières $y_1(x)$.

145. Trouver la solution générale de l'équation linéaire non homogène du premier ordre $y' + p(x)\, y = q(x)$ connaissant deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

146. Montrer qu'une équation linéaire reste linéaire après tout changement de variable indépendante $x = \varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est une fonction dérivable.

147. Montrer qu'une équation linéaire reste linéaire quelle que soit la transformation linéaire faite sur la fonction inconnue $y =$

$= \alpha(x)\, z + \beta(x)$, où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions dérivables quelconques et $\alpha(x) \neq 0$ dans l'intervalle considéré.

Dans les problèmes suivants, trouver des solutions des équations qui satisfont aux conditions indiquées:

148. $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$, y est borné pour $x \to +\infty$.

149. $y' - y = -2e^{-x}$, $y \to 0$ pour $x \to +\infty$.

150. $y' \sin x - y \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $y \to 0$ pour $x \to \infty$.

151. $x^2 y' \cos \dfrac{1}{x} - y \sin \dfrac{1}{x} = -1$, $y \to 1$, pour $x \to \infty$.

152. $2xy' - y = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $y \to -1$ pour $x + \infty$.

153. $x^2 y' + y = (x^2 + 1)\, e^x$, $y \to 1$ pour $x \to -\infty$.

154. $xy' + y = 2x$, y est borné pour $x \to 0$.

155. $y' \sin x + y \cos x = 1$, y est borné pour $x \to 0$.

156. $y' \cos x - y \sin x = -\sin 2x$, $y \to 0$ pour $x \to \pi/2$.

2°. Equation de Bernoulli. C'est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)\, y^n,$$

où $n \neq 0, 1$ (pour $n = 0$ et $n = 1$ cette équation est linéaire).

En opérant le changement de variable $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, on peut ramener l'équation de Bernoulli à une équation linéaire et donc l'intégrer comme une équation linéaire.

Exemple 7. Résoudre l'équation de Bernoulli

$$y' - xy = -xy^3.$$

Solution. Divisons les deux membres de l'équation par y^3:

$$\frac{y'}{y^3} - x\frac{1}{y^2} = -x.$$

Effectuons le changement de variable

$$\frac{1}{y^2} = z, \quad -\frac{2y'}{y^3} = z',$$

d'où

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2} z'.$$

Après la substitution la dernière équation se transforme en une équation linéaire

$$-\frac{1}{2} z' - xz = -x \text{ ou } z' + 2xz = 2x$$

dont la solution générale est

$$z = 1 + Ce^{-x^2}.$$

On en déduit l'intégrale générale de l'équation donnée

$$\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{-x^2}$$

où

$$(1 + Ce^{-x^2})\, y^2 = 1.$$

Exemple 8. Résoudre l'équation de Bernoulli

$$xy' + y = y^2 \ln x. \tag{16}$$

Solution. Appliquons la méthode de variation de la constante arbitraire. La solution générale de l'équation homogène associée $xy' + y = 0$ est de la forme $y = C/x$. Cherchons la solution générale de l'équation (16) sous la forme

$$y = C(x)/x, \tag{17}$$

où $C(x)$ est une nouvelle fonction inconnue.

En portant (17) dans (16), on aura

$$C'(x) = C^2(x)\frac{\ln x}{x^2}.$$

Pour trouver la fonction $C(x)$ nous avons obtenu une équation à variables séparables. En effectuant la séparation des variables et en intégrant cette équation, on trouve

$$\frac{1}{C(x)} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C; \qquad C(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}.$$

La solution générale de l'équation (16) est :

$$y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x} \quad \blacklozenge$$

En effectuant un changement de variables approprié, on peut ramener certaines équations non linéaires du premier ordre aux équations linéaires ou aux équations de Bernoulli.

Exemple 9. Résoudre l'équation $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$.

Solution. Ecrivons cette équation sous la forme

$$y' + 2 \sin\frac{y}{2} \cos\frac{y}{2} + x\, 2\cos^2\frac{y}{2} = 0.$$

En divisant les deux membres de l'équation par $2\cos^2\frac{y}{2}$, on obtient

$$\frac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} + x = 0.$$

En effectuant la substitution $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=z$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}}$, on ramène cette équation à l'équation linéaire $\frac{dz}{dx}+z=-x$ dont la solution générale est

$$z = 1 - x + Ce^{-x}.$$

En substituant à z son expression en y, on obtient l'intégrale générale de l'équation donnée

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=1-x+Ce^{-x}.\blacklozenge$$

Dans certaines équations la fonction inconnue $y(x)$ peut se trouver sous le signe somme. Dans de tels cas on arrive parfois, au moyen de dérivation, à ramener une telle équation à une équation différentielle.

Exemple 10. Résoudre l'équation

$$x\int_0^x y(t)\,dt=(x+1)\int_0^x ty(t)\,dt\ x>0.$$

Solution. En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à x, on obtient

$$\int_0^x y(t)\,dt+xy(x)=\int_0^0 ty(t)\,dt+(x+1)\,xy(x),$$

ou encore

$$\int_0^x y(t)\,dt=\int_0^x ty(t)\,dt+x^2y(x).$$

En dérivant une seconde fois par rapport à x, on aura une équation linéaire homogène par rapport à $y(x)$:

$$y(x) = xy(x) + x^2y'(x) + 2xy(x),$$

ou

$$x^2y'(x) + (3x - 1)\,y(x) = 0.$$

En séparant les variables et en intégrant, on trouve

$$y=C\frac{1}{x^3}e^{-1/x}.$$

Il est facile d'établir que cette solution vérifie l'équation initiale.

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes:

157. $y' + 2xy = 2xy^2$.

158. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$.

159. $(x^3 + e^y)\, y' = 3x^2$.

160. $y' + 2xy = y^2e^x$.

161. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}\, e^x$.

162. $2y' \ln x + \frac{y}{x} = y^{-1} \cos x$.

163. $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$.

164. $(x^2 + y^2 + 1)\, dy + xy\, dx = 0$.

165. $y' - y \cos x = y^2 \cos x$.

En opérant un changement de variables, ramener les équations non linéaires suivantes aux équations linéaires ou aux équations de Bernoulli et les résoudre :

166. $y' - \operatorname{tg} y = e^x \frac{1}{\cos y}$.

167. $y' = y\,(e^x + \ln y)$.

168. $y' \cos y + \sin y = x + 1$.

169. $yy' + 1 = (x - 1)\, e^{-\frac{y^2}{2}}$.

170. $y' + x \sin 2y = 2xe^{-x^2} \cos^2 y$.

Résoudre les équations suivantes par dérivation sous le signe somme :

171. $\int_0^x ty\,(t)\, dt = x^2y\,(x)$.

172. $y\,(x) = \int_0^x y\,(t)\, dt + e^x$.

173. $\int_0^x ty\,(t)\, dt = x^2 + y\,(x)$.

174. $\int_0^1 y\,(xt)\, dt = ny\,(x)$.

§ 7. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant

1°. Equations aux différentielles totales. Une équation différentielle de la forme

$$M\,(x,\ y)\, dx + N\,(x,\ y)\, dy = 0 \tag{1}$$

s'appelle *équation aux différentielles totales* si son premier membre représente une différentielle totale d'une certaine fonction $u\,(x,\ y)$, c'est-à-dire si

$$M\, dx + N\, dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy.$$

Théorème. *Pour que l'équation* (1) *soit une équation aux différentielles totales, il faut et il suffit que dans un certain domaine D de*

variation des variables x et y soit satisfaite la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est de la forme $u(x, y) = C$ ou

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{3}$$

Exemple 1. Résoudre l'équation différentielle

$$(\sin xy + xy \cos xy)\,dx + x^2 \cos xy\,dy = 0.$$

Solution. Vérifions si cette équation est une équation aux différentielles totales :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy \cos xy) = x \cos xy + x \cos xy -$$
$$- x^2 y \sin xy = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy,$$

si bien que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

c'est-à-dire que la condition (2) est satisfaite. Ainsi l'équation donnée est aux différentielles totales et

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos xy,$$

donc,

$$u(x, y) = \int (\sin xy + xy \cos xy)\,dx + \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction indéterminée pour le moment.

En intégrant, on obtient

$$u(x, y) = x \sin xy + \varphi(y).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y}$ de la fonction trouvée $u(x, y)$ doit être égale à $x^2 \cos xy$, ce qui donne

$$x^2 \cos xy + \varphi'(y) = x^2 \cos xy,$$

d'où $\varphi'(y) = 0$ si bien que $\varphi(y) = C$. Ainsi

$$u(x, y) = x \sin xy + C.$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle donnée est

$$x \sin xy = C. \ \blacklozenge$$

En intégrant certaines équations différentielles, on peut grouper les termes de manière à obtenir des combinaisons facilement intégrables.

Exemple 2. Résoudre l'équation différentielle

$$(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0. \tag{4}$$

Solution. Ici, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$ de sorte que la condition (2) est satisfaite et donc, l'équation considérée est une équation aux différentielles totales. Elle peut être facilement ramenée à la forme $du = 0$ par le groupement direct de ses termes. A cet effet, écrivons-la sous la forme

$$x^3\,dx + xy\,(y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0.$$

Il est évident que

$$x^3\,dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \qquad xy\,(y\,dx + x\,dy) = xy\,d\,(xy) = d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right),$$

$$y^3\,d = dy\left(\frac{y^4}{4}\right).$$

L'équation (4) peut donc se mettre sous la forme

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = 0$$

ou

$$d\left[\frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right] = 0.$$

Par suite

$$x^4 + 2\,(xy)^2 + y^4 = C$$

est l'intégrale générale de l'équation (4).

Intégrer les équations aux différentielles totales suivantes:

175. $x\,(2x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2y^2)\,y' = 0.$

176. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

177. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

178. $\left(3x^2\,\mathrm{tg}\,y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$

179. $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy.$

180. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0.$

181. $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0.$

182. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0.$

183. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$

184. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

185. $\frac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dy+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0.$

186. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{(y^2-3x^2)\,dy}{y^4}=0,\quad y\,|_{x=1}=1.$

187. $y\,(x^2+y^2+a^2)\,dy+x\,(x^2+y^2-a^2)\,dx=0.$

188. $(3x^2y+y^3)\,dx+(x^3+3xy^2)\,dy=0.$

2°. **Facteur intégrant.** Dans certains cas où l'équation (1) n'est pas aux différentielles totales, on arrive parfois à trouver une fonction $\mu\,(x,\,y)$ telle que le premier membre de l'équation (1) se transforme en une différentielle totale après la multiplication par cette fonction

$$du=\mu M\,dx+\mu N\,dy.$$

Une telle fonction $\mu\,(x,\,y)$ s'appelle *facteur intégrant*. De par la définition même du facteur intégrant on a

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ou

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-N\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

d'où

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Pour déterminer le facteur intégrant nous avons obtenu une équation aux dérivées partielles.

Signalons quelques cas particuliers où on parvient à trouver assez facilement la solution de l'équation (5), c'est-à-dire le facteur intégrant.

1. Si $\mu=\mu\,(x)$, alors $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ et l'équation (5) devient

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{6}$$

Pour qu'il existe un facteur intégrant indépendant de y, il faut et il suffit que le second membre de l'équation (6) soit fonction de la seule variable x. Dans un tel cas $\ln\mu$ s'obtient par une quadrature.

Exemple 3. Résoudre l'équation $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0.$

Solution. Ici, $M = x + y^2$, $N = -2xy$. On a

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y+2y}{-2xy} = -\frac{2}{x},$$

donc,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}, \qquad \ln \mu = -2 \ln |x|, \qquad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

L'équation

$$\frac{x+y^2}{x^2}\, dx - 2\frac{xy}{x^2}\, dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales. Son premier membre peut être mis sous la forme

$$\frac{dx}{x} - \frac{2xy\, dy - y^2\, dx}{x^2} = 0, \quad \text{d'où } d\left(\ln |x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

et l'intégrale générale de l'équation initiale est

$$x = C \cdot e^{y^2/x}. \ \blacklozenge$$

2. De façon analogue si $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ est fonction de la seule variable y, l'équation (1) possède un facteur intégrant $\mu = \mu(y)$ qui ne dépend que de y.

Exemple 4. Résoudre l'équation $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1}) \times \times dy = 0$.

Solution. Ici $M = 2xy \ln y$, $N = x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1}$. On a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy \ln y} = -\frac{1}{y},$$

et donc

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{1}{y}, \qquad \mu = \frac{1}{y}.$$

L'équation

$$\frac{2xy \ln y\, dx}{y} + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y}\, dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales. Elle peut être mise sous la forme $d(x^2 \ln y) + y\sqrt{y^2+1}\, dy = 0$, d'où

$$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Exemple 5. Résoudre l'équation $(3x + 2y + y^2)\, dx + (x + + 4xy + 5y^2)\, dy = 0$ sachant que son facteur intégrant est de la forme $\mu = \varphi(x + y^2)$.

Solution. Posons $z = x + y^2$, alors $\mu = \varphi(z)$ et, par conséquent,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{d \ln \mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \ln \mu}{dz}, \qquad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{d \ln \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d \ln \mu}{dz} \cdot 2y.$$

L'équation (5) pour déterminer le facteur intégrant sera de la forme

$$(N - 2My) \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2My}.$$

Puisque $M = 3x + 2y + y^2$, $N = x + 4xy + 5y^2$, on a

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2My} = \frac{1}{x + y^2} = \frac{1}{z},$$

et donc, $\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{1}{z}$, d'où $\mu = z$, c'est-à-dire $\mu = x + y^2$. En multipliant cette équation par $\mu = x + y^2$, on obtient

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)\, dx +$$
$$+ (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)\, dy = 0.$$

C'est une équation aux différentielles totales et, d'après (3), son intégrale générale sera

$$\int_{x_0}^{x} (3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)\, dx +$$
$$+ \int_{y_0}^{y} (x_0^2 + 4x_0^2 y + 6x_0 y^2 + 4x_0 y^3 + 5y^4)\, dy = C,$$

ou

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = \widetilde{C},$$

où

$$\widetilde{C} = C + x_0^2 y_0 + 2x_0^2 y_0^2 + 2x_0 y_0^3 + x_0 y_0^4 + y_0^5 + x_0^3.$$

Après quelques transformations simples on aura

$$(x + y)(x + y^2)^2 = \widetilde{C}.$$

Intégrer les équations suivantes:

189. $(1 - x^2y)\, dx + x^2 (y - x)\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

190. $(x^2 + y)\, dx - x\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

191. $(x + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

192. $(2x^2y + 2y + 5)\, dx + (2x^3 + 2x)\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

193. $(x^4 \ln x - 2xy^3)\, dx + 3x^2y^2\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

194. $(x + \sin x + \sin y)\, dx + \cos y\, dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

195. $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$, $\mu = \varphi(y)$.

196. $(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0,\ \mu = \varphi(x + y^2)$.

197. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0,\ \mu = \varphi(y^2 - x^2)$.

198. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0,\ \mu = \varphi(x^2 + y^2)$.

§ 8. Equations différentielles du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée

1°. Equations du premier ordre de degré n en y'. Soit une équation différentielle

$$(y')^n + p_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x, y)\,y' + p_n(x, y) = 0. \quad (1)$$

Résolvons cette équation par rapport à y'. Soient

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y),\ \ldots,\ y' = f_k(x, y) \qquad (k \leqslant n)$$

des solutions réelles de l'équation (1).

L'intégrale générale de l'équation (1) sera exprimée par l'ensemble des intégrales

$$\Phi_1(x, y, C) = 0,\ \Phi_2(x, y, C) = 0,\ \ldots,\ \Phi_k(x, y, C) = 0,$$

où $\Phi_i(x, y, C) = 0$ est l'intégrale de l'équation $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Ainsi, par chaque point de la région où y' prend des valeurs réelles il passe k courbes intégrales.

Exemple 1. Résoudre l'équation $yy'^2 + (x - y)\,y' - x = 0$.

Solution. Résolvons cette équation par rapport à y', il vient

$$y' = \frac{y - x \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y}; \quad y' = 1, \quad y' = -\frac{x}{y},$$

d'où

$$y = x + C,\ y^2 + x^2 = C^2.$$

Exemple 2. Résoudre l'équation $2y'^2 - 2xy' - 2y + x^2 = 0$.

Solution. Résolvons cette équation par rapport à y, il vient

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Posons $y' = p$, où p est un paramètre; il vient

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

Différentions (2), il vient

$$dy = 2p\,dp - p\,dx - x\,dp + x\,dx.$$

Mais puisque $dy = p\,dx$, on aura

$$p\,dx = 2p\,dp - p\,dx - x\,dp + x\,dx,$$

ou

$$2p\,dp - 2p\,dx - x\,dp + x\,dx = 0,$$

$$2p\,(dp - dx) - x\,(dp - dx) = 0, \quad (2p - x)\,(dp - dx) = 0.$$

Considérons deux cas: 1) $dp - dx = 0$, d'où $p = x + C$, où C est une constante arbitraire. En portant p dans (2), on obtient la solution générale de l'équation donnée

$$y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}. \tag{3}$$

Dans l'égalité $p = x + C$, on ne peut pas remplacer p par y' et intégrer l'équation obtenue $y' = x' + C$ (parce qu'il apparaîtra dans ce cas une dérivée seconde arbitraire, ce qui ne peut pas avoir lieu parce que l'équation différentielle considérée est du premier ordre).

2) $2p - x = 0$, d'où $p = x/2$. En portant dans (2), on obtient encore une solution

$$y = x^2/4. \tag{4}$$

Vérifions s'il n'y a pas d'unicité en chaque point de la solution (4), c'est-à-dire si cette solution est singulière (cf. § 11). A cet effet, prenons sur la courbe intégrale (4) un point quelconque $M_0\,(x_0,\ y_0)$, où $y_0 = x_0^2/4$. Cherchons maintenant une solution qu est contenue dans la solution générale (3) et dont la courbe intégrale passe par le point $M_0\left(x_0,\ \frac{x_0^2}{4}\right)$. En portant les coordonnées de ce point dans la solution générale (3), on aura

$$\frac{x_0^2}{4} = Cx_0 + C^2 + \frac{x_0^2}{2}, \text{ ou } \left(C + \frac{x_0}{2}\right)^2 = 0,$$

d'où $C = -x_0/2$. Introduisons cette valeur de la constante C dans (3). On obtient une solution particulière

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0 x}{2} + \frac{x_0^2}{4}, \tag{5}$$

qui ne coïncide pas avec la solution (4). Pour les solutions (4) et (5) on a respectivement $y' = x/2$ et $y' = x - x_0/2$. Pour $x = x_0$ les deux dérivées coïncident. Cela signifie qu'au point M_0 la condition d'unicité n'est pas satisfaite, c'est-à-dire que par ce point il passe deux courbes intégrales ayant la même tangente. Puisque x_0 est arbitraire, la condition d'unicité n'est satisfaite en aucun point de la solution (4), ce qui signifie que cette solution est singulière.

Intégrer les équations suivantes:

199. $4y'^2 - 9x = 0$.

200. $y'^2 - 2yy' = y^2\,(e^{2x} - 1)$.

201. $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0.$
202. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$
203. $y'^2 - (2x + y)\, y' + x^2 + xy = 0.$
204. $y'^3 + (x + 2)\, e^y = 0.$
205. $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0.$
206. $y'^2 - yy' + e^x = 0.$
207. $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0.$

2°. Equations de la forme $f(y, y') = 0$ et $f(x, y') = 0$. Si les équations $f(y, y') = 0$ et $f(x, y') = 0$ sont facilement résolubles par rapport à y', leur résolution donne des équations à variables séparables.

Considérons des cas où ces équations ne sont pas résolubles par rapport à y'.

A. L'équation de la forme $f(y, y') = 0$ est résoluble par rapport à y:

$$y = \varphi(y').$$

Posons $y' = p$, alors $y = \varphi(p)$. En différentiant cette équation et en remplaçant dy par $p\,dx$, on obtient

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp,$$

d'où

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp \quad \text{et} \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C.$$

On obtient la solution générale de l'équation sous forme paramétrique

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C, \quad y = \varphi(p). \tag{6}$$

Exemple 3. Résoudre l'équation $y = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ (a, b sont des constantes).

Solution. Posons $\frac{dy}{dx} = p$, alors $y = ap^2 + bp^3$, $dy = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$, ou $p\,dx = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$. D'où, $dx = 2a\,dp + 3bp\,dp$ et $x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C$. La solution générale sera

$$x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C, \quad y = ap^2 + bp^3.$$

B. Si l'équation de la forme $f(y, y') = 0$ n'est pas résoluble (ou est difficilement résoluble) tant par rapport à y que par rapport à y', mais admet une expression de y et y' par un certain paramètre t:

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right),$$

dn procède comme suit. On a $dy = p dx = \psi(t)\, dx$. D'autre part, $dy = \varphi'(t)\, dt$ de sorte que $\psi(t)\, dx = \varphi'(t)\, dt$ et $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt$; d'où

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt.$$

Ainsi, on obtient la solution générale de l'équation différentielle donnée sous forme paramétrique

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

Exemple 4. Résoudre l'équation $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.
Solution. Posons $y = \cos^3 t$, $y' = p = \sin^3 t$,

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-3\cos^2 t \sin t\, dt}{\sin^3 t} = -3\,\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt.$$

D'où

$$x = \int \left(3 - \frac{3}{\sin^2 t}\right) dt = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C;$$

et la solution générale est

$$x = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C, \qquad y = \cos^3 t.$$

C. Equation de la forme $f(x, y') = 0$. Supposons que cette équation soit résoluble par rapport à x:

$$x = \varphi(y').$$

Posons $y' = p$, il vient $dx = \varphi'(p)\, dp$. Mais $dx = \frac{dy}{p}$ et, par suite, $\frac{dy}{p} = \varphi'(p)\, dp$ si bien que

$$dy = p\varphi'(p)\, dp \quad \text{et} \quad y = \int p\varphi'(p)\, dp + C.$$

Ainsi, on trouve

$$x = \varphi(p), \qquad y = \int \varphi'(p)\, p\, dp + C \tag{7}$$

qui est la solution générale de l'équation sous forme paramétrique (p est un paramètre).

Remarque. Dans les formules (6) et (7) p ne peut pas être considéré comme une dérivée. Dans ces formules p est simplement un paramètre.

Exemple 5. Résoudre l'équation $a\,\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x$.

Solution. Posons $\frac{dy}{dx} = p$, alors

$$x = ap + bp^2, \qquad dx = a\,dp + 2bp\,dp,$$

$$dy = p\,dx = ap\,dp + 2bp^2\,dp, \qquad y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C.$$

Finalement,

$x = ap + bp^2$, $\quad y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C$ est la solution générale.

Par analogie avec le cas B on peut essayer de résoudre l'équation $f(x, y') = 0$ par la méthode d'introduction du paramètre t.

Intégrer les équations suivantes:

208. $y = y'^2 e^{y'}$.

209. $y' = e^{y'/y}$.

210. $x = \ln y' + \sin y'$.

211. $x = y'^2 - 2y' + 2$.

212. $y = y' \ln y'$.

213. $y = (y' - 1)\,e^{y'}$.

214. $y'^2 x = e^{1/y'}$.

215. $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$.

216. $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$.

217. $x = y' + \sin y'$.

218. $y = y'(1 + y' \cos y')$.

219. $y = \arcsin y' + \ln(1 + y'^2)$.

3°. Equations de Lagrange et de Clairaut. *L'équation de Lagrange* est de la forme

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

En posant $y' = p$, en dérivant par rapport à x et en remplaçant dy par $p\,dx$ on ramène cette équation à une équation linéaire par rapport à x en tant que fonction de p. En recherchant la solution de cette dernière équation $x = r(p, C)$, on obtient la solution générale de l'équation initiale sous forme paramétrique:

$x = r(p, C) \quad y = r(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p)$ (p est un paramètre).

En outre, l'équation de Lagrange peut encore posséder des solutions singulières (cf. § 11) de la forme $y = \varphi(c)\,x + \psi(c)$, où c est racine de l'équation $c = \varphi(c)$.

Exemple 6. Intégrer l'équation $y = 2xy' + \ln y'$.

Solution. Posons $y' = p$, alors il vient $y = 2xp + \ln p$. En différentiant, on trouve

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + \frac{dp}{p},$$

d'où

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

Nous avons obtenu une équation du premier ordre, linéaire en x; en la résolvant, on a

$$x=\frac{C}{p^2}-\frac{1}{p}.$$

En portant la valeur trouvée de x dans l'expression de y, on obtient en définitive

$$x=\frac{C}{p^2}-\frac{1}{p}, \qquad y=\ln p+\frac{2C}{p}-2. \blacklozenge$$

L'équation de Clairaut est de la forme

$$y = xy' + \psi(y').$$

La méthode de sa résolution est la même que celle utilisée pour l'équation de Lagrange. La solution générale de l'équation de Clairaut est de la forme

$$y = Cx + \psi(C).$$

L'équation de Clairaut peut encore posséder une solution singulière qui est obtenue en éliminant p entre les équations $y = xp + \psi(p)$, $x + \psi'(p) = 0$.

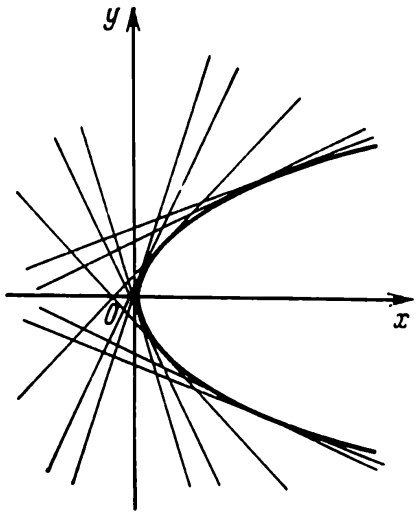

Fig. 14

Exemple 7. Intégrer l'équation $y = xy' + \frac{a}{2y'}$ ($a = \text{const}$).

Solution. Posons $y'=p$, il vient

$$y=xp+\frac{a}{2p}.$$

En différentiant cette dernière équation et en remplaçant dy par $p\,dx$, on trouve

$$p\,dx=p\,dx+x\,dp-\frac{a}{2p^2}\,dp,$$

d'où

$$dp\left(x-\frac{a}{2p^2}\right)=0.$$

En annulant le premier facteur, on obtient $dp = 0$, d'où $p = C$ et la solution générale de l'équation initiale est $y = Cx + \frac{a}{2C}$ qui est une famille de droites à un paramètre. En annulant le second facteur, on aura $x = a/2p^2$. En éliminant p entre cette équation et l'équation $y = xp + \frac{a}{2p}$, on obtient $y^2 = 2ax$ qui est aussi une solution de notre équation (une solution singulière).

Au point de vue géométrique, la courbe $y^2 = 2ax$ est l'enveloppe de la famille de droites fournies par la solution générale (fig. 14).

Intégrer les équations suivantes:

220. $y = 2xy' + \ln y'$.

221. $y = x(1 + y') + y'^2$.

222. $y = 2xy' + \sin y'$.

223. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$.

224. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.

225. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$.

226. $y = xy' + y'^2$.

227. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.

228. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.

229. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

230. Trouver l'équation d'une courbe dont toute tangente forme avec les axes des coordonnées un triangle de surface constante $S = 2a^2$.

231. Trouver l'équation de la courbe telle que le tronçon de tangente compris entre les axes des coordonnées ait une longueur constante a.

§ 9. Equation de Riccati

Une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x) = 0, \tag{1}$$

où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des fonctions connues s'appelle *équation de Riccati* (généralisée). Si les coefficients a, b, c dans l'équation de Riccati sont constants, l'équation admet la séparation des variables et on obtient tout de suite son intégrale générale

$$C_1 - x = \int \frac{dy}{ay^2 + by + c}.$$

Dans le cas général, l'équation (1) ne s'intègre pas par des quadratures comme cela a été montré par Liouville.

Propriétés de l'équation de Riccati. 1°. *Si l'on connaît une solution particulière quelconque $y_1(x)$ de l'équation* (1), *sa solution générale peut être obtenue par des quadratures.*

En effet, posons

$$y = y_1(x) + z(x),$$

où $z(x)$ est une nouvelle fonction inconnue. En portant (2) dans (1), on trouve

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + a(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + b(x)(y_1 + z) + c(x) = 0,$$

d'où, compte tenu du fait que $y_1(x)$ est solution de l'équation (1), on obtient

$$\frac{dz}{dx} + a(x)(2y_1 z + z^2) + b(x)\, z = 0,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} + a(x)\,z^2 + [2a(x)\,y_1 + b(x)]\,z = 0. \tag{3}$$

L'équation (3) est un cas particulier de l'équation de Bernoulli (cf. § 6).

Exemple 1. Résoudre l'équation de Riccati

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x \tag{4}$$

connaissant l'une de ses solutions particulières $y_1 = e^x$.

Solution. Posons $y = e^x + z(x)$ et portons dans l'équation (4), il vient

$$\frac{dz}{dx} = z^2,$$

d'où

$$-\frac{1}{z} = x - C, \text{ ou } z = \frac{1}{C-x}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation (4) est

$$y = e^x + \frac{1}{C-x}.$$

Remarque. Au lieu de la substitution (2) il s'avère parfois plus pratique d'effectuer la substitution

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)},$$

qui ramène tout de suite l'équation de Riccati (1) à l'équation linéaire

$$u' - (2ay_1 + b)\,u = a.$$

2°. *Si l'on connaît deux solutions particulières de l'équation* (1), *son intégrale générale s'obtient par une seule quadrature.*

Soient données deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation (1). En utilisant le fait qu'on a l'identité

$$\frac{dy_1}{dx} \equiv -a(x)\,y_1^2 - b(x)\,y_1 - c(x),$$

représentons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{1}{y-y_1}\,\frac{d(y-y_1)}{dx} = -a(x)\,(y+y_1) - b(x),$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}[\ln(y-y_1)] = -a(x)\,(y+y_1) - b(x). \tag{5}$$

En opérant d'une manière analogue, on trouve pour la deuxième solution particulière $y_2(x)$

$$\frac{d}{dx}[\ln(y-y_2)] = -a(x)\,(y+y_2) - b(x). \tag{6}$$

En soustrayant l'égalité (6) de l'égalité (5), on obtient

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\frac{y-y_1}{y-y_2}\right]=a(x)(y_2-y_1),$$

d'où

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int a(x)[y_2(x)-y_1(x)]\,dx}. \tag{7}$$

Exemple 2. L'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m^2}{x^4}-y^2, \qquad m=\text{const}$$

a des solutions particulières

$$y_1=\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}, \qquad y_2=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}.$$

En utilisant la formule (7), on obtient l'intégrale générale de l'équation initiale

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{-\int\frac{2m}{x^2}dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x^2y-x-m}{x^2y-x+m}=Ce^{\frac{2m}{x}}.$$

Intégrer les équations de Riccati suivantes connaissant leurs solutions particulières :

232. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$, $y_1=e^x$.

233. $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$, $y_1=\sin x$.

234. $xy'-y^2+(2x+1)y=x^2+2x$, $y_1=x$.

235. $x^2y'=x^2y^2+xy+1$, $y_1=-1/x$.

236. Trouver l'intégrale générale de l'équation de Riccati pour le cas où le rapport des coefficients ne dépend pas de x, c'est-à-dire $a(x):b(x):c(x)=m:n:p$ (m, n, p sont des constantes).

237. Démontrer que l'équation de Riccati conserve sa forme quelle que soit la transformation faite sur la variable indépendante $x=\varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est une fonction continûment dérivable quelconque définie dans l'intervalle (t_0, t_1) et $\varphi'(t)\neq 0$ sur (t_0, t_1).

§ 10. Etablissement des équations différentielles des familles de courbes. Problèmes sur les trajectoires

1°. Etablissement des équations différentielles des familles de courbes. Soit donnée l'équation d'une famille de courbes planes à un paramètre

$$y=\varphi(x, a) \quad (a \text{ est un paramètre}). \tag{1}$$

En dérivant (1) par rapport à x, on trouve

$$y' = \varphi'_x(x, a). \tag{2}$$

En éliminant le paramètre a entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

qui exprime une propriété commune à toutes les courbes de la famille (1). L'équation (3) sera l'équation différentielle cherchée de la famille (1).

Si une famille de courbes à un paramètre est définie par une équation

$$\Phi(x, y, a) = 0,$$

l'équation différentielle de cette famille sera obtenue en éliminant le paramètre a entre les équations

$$\begin{cases} \Phi(x, y, a) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} y' = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant une relation

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \tag{4}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des paramètres. Dérivons (4) n fois par rapport à x et éliminons les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre (4) et les équations obtenues, il vient

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

C'est l'équation différentielle de la famille de courbes (4) à n paramètres au sens que (4) est intégrale générale de l'équation (5).

Exemple 1. Trouver l'équation différentielle de la famille d'hyperboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Solution. Dérivons cette équation par rapport à x, il vient

$$\frac{2x}{a^2} - 2yy' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a^2} = yy'.$$

Multiplions par x les deux membres, alors $x^2/a^2 = xyy'$. En portant dans l'équation de la famille, on trouve $xyy' - y^2 = 1$.

Exemple 2. Trouver l'équation différentielle de la famille de courbes

$$y = a(1 - e^{-\frac{x}{a}}), \ a \text{ étant un paramètre.}$$

Solution. Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x, il vient

$$y' = e^{-x/a}.$$

De l'expression pour y' on trouve $a = -\frac{x}{\ln y'}$ et, en portant cette expression de a dans l'équation de la famille de courbes, on trouve

$$y = -\frac{x}{\ln y'}(1-y'), \text{ ou } y \ln y' + x(1-y') = 0.$$

Exemple 3. Former l'équation différentielle de la famille de droites passant à une distance égale à l'unité de l'origine des coordonnées.

Solution. Partons de l'équation normale de la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0, \tag{6}$$

où α est un paramètre.

En dérivant (6) par rapport à x, on trouve $\cos \alpha + y' \sin \alpha = 0$, d'où $y' = -\operatorname{ctg} \alpha$ et, par suite,

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \cos \alpha = -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

En portant $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ dans (6), on obtient

$$\frac{-xy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} - 1 = 0, \text{ ou } y = xy' + \sqrt{1+y'^2}.$$

Former les équations différentielles des familles de courbes suivantes :

238. $y = a/x$.

239. $x^2 - y^2 = ax$.

240. $y = ae^{x/a}$.

241. $y = Cx - C - C^2$.

242. $y = e^x(ax+b)$.

243. $y^2 = 2Cx + C^2$.

244. $y = ax^2 + bx + c$.

245. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.

246. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

247. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

248. $y = a \sin(x+\alpha)$.

2°. Problèmes sur les trajectoires. Soit donnée une famille de courbes planes

$$\Phi(x, y, a) = 0 \tag{7}$$

dépendant du seul paramètre a.

Une courbe qui forme en tout point un angle constant α avec une courbe de la famille (7) passant par ce point s'appelle *trajectoire isogonale* de cette famille ; en particulier, si $\alpha = \pi/2$, cette courbe s'appelle *trajectoire orthogonale*.

La famille (7) étant supposée donnée, nous chercherons ses trajectoires isogonales.

A. Trajectoires orthogonales. Etablissons l'équation différentielle de la famille de courbes donnée (cf. p. 1°). Supposons qu'elle

soit de la forme

$$F(x, y, y') = 0.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est de la forme

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

donne la famille de trajectoires orthogonales.

Soit une famille de courbes planes donnée par l'équation en coordonnées polaires

$$\Phi(\rho, \varphi, a) = 0, \tag{8}$$

où a est un paramètre. En éliminant le paramètre a entre la relation (8) et $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$, on obtient l'équation différentielle de la famille (8): $F(\rho, \varphi, \rho') = 0$. En y remplaçant ρ' par $-\rho^2/\rho'$, on obtient l'équation différentielle de la famille de trajectoires orthogonales

$$F\left(\rho, \varphi, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0.$$

B. Trajectoires isogonales. Supposons que les trajectoires coupent les courbes d'une famille donnée sous un angle α tel que $\operatorname{tg}\alpha = k$. On peut montrer que l'équation différentielle des trajectoires isogonales est de la forme

$$F\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right) = 0.$$

Exemple 4. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de lignes $y = kx$.

Solution. La famille de lignes $y = kx$ se compose de droites passant par l'origine des coordonnées. Pour trouver l'équation différentielle de cette famille, dérivons par rapport à x les deux membres de l'équation $y = kx$. On a $y' = k$. En éliminant le paramètre k entre le système d'équations

$$\begin{cases} y = kx, \\ y' = k, \end{cases}$$

on aura l'équation différentielle de la famille $xy' = y$. En y remplaçant y' par $-1/y'$, on obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales $-x/y' = y$ ou $yy' + x = 0$. L'équation obtenue est une équation à variables séparables; en l'intégrant, on trouve l'équation des trajectoires orthogonales $x^2 + y^2 = C$ $(C \geqslant 0)$. Les

trajectoires orthogonales sont des cercles ayant pour centre l'origine des coordonnées (fig. 15).

Exemple 5. Trouver l'équation de la famille de lignes orthogonales à la famille $x^2 + y^2 = 2ax$.

Solution. Cette famille de lignes représente une famille de cercles dont les centres se situent sur l'axe Ox et qui sont tangentes à l'axe Oy.

En dérivant par rapport à x les deux membres de l'équation de la famille donnée, on trouve $x + yy' = a$. En éliminant le paramètre a entre les équations $x^2 + y^2 = 2ax$ et $x + yy' = a$, on obtient l'équation différentielle de la famille donnée : $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$. L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$x^2 - y^2 + 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0, \quad \text{ou}$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

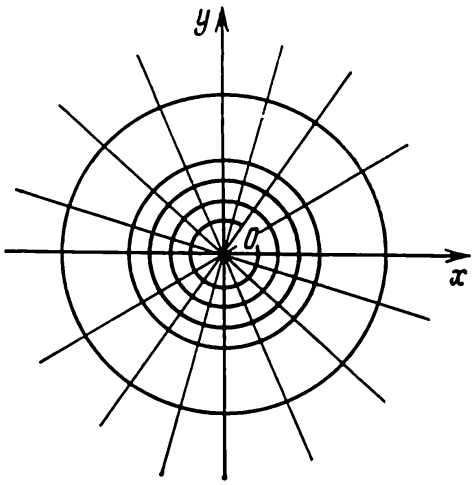

Fig. 15

C'est une équation homogène. Son intégration donne $x^2 + y^2 = Cy$. Les courbes intégrales sont des cercles dont les centres se situent sur l'axe Oy et qui sont tangentes à l'axe Ox (fig. 16).

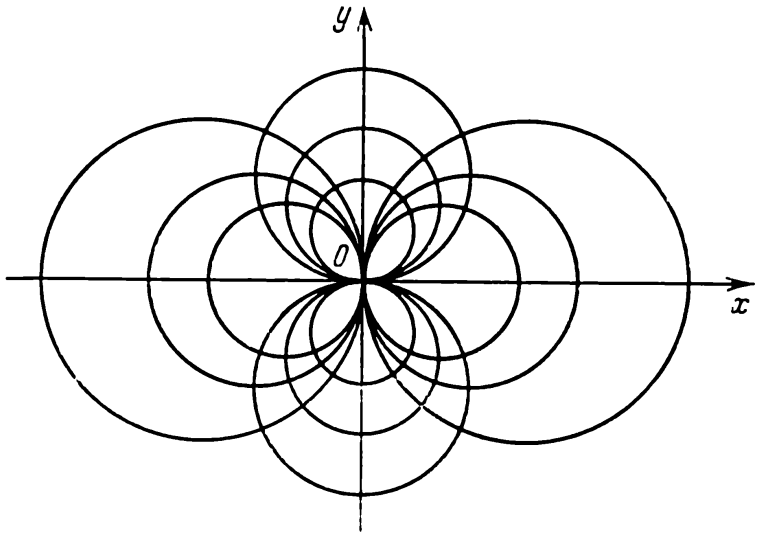

Fig. 16

Exemple 6. Trouver les trajectoires orthogonales à une famille de paraboles $y = ax^2$.

Solution. Formons l'équation différentielle de la famille de paraboles. A cet effet, dérivons par rapport à x les deux membres de

cette équation, il vient : $y' = 2ax$. En éliminant le paramètre a on trouve $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$ ou $y' = \frac{2y}{x}$, ce qui est l'équation différentielle de

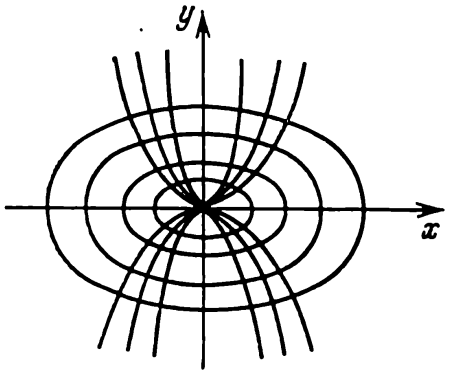

Fig. 17

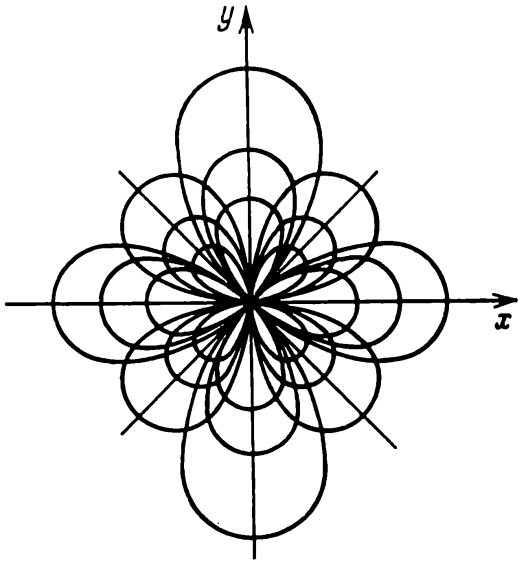

Fig. 18

la famille donnée. En remplaçant dans cette équation y' par $-1/y'$, on obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Intégrons, il vient : $y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$ ou $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$, où $C > 0$. Les trajectoires orthogonales sont représentées par une famille d'ellipses (fig. 17).

Exemple 7. Trouver les trajectoires orthogonales à la famille de lemniscates $\rho^2 = a \cos 2\varphi$.

Solution. On a

$$\rho^2 = a \cos 2\varphi, \quad \rho\rho' = -a \sin 2\varphi.$$

En éliminant le paramètre a, on obtient l'équation différentielle de cette famille de courbes

$$\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi.$$

En remplaçant ρ' par $-\rho^2/\rho'$, on trouve l'équation différentielle de la famille de trajectoires orthogonales

$$-\rho^2/\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi,$$

d'où $\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{ctg} 2\varphi d\varphi$. En intégrant, on trouve l'équation des trajectoires orthogonales :

$$\rho^2 = C \sin 2\varphi.$$

Les trajectoires orthogonales à la famille de lemniscates sont des lemniscates dont l'axe de symétrie forme avec l'axe polaire un angle de $\pm 45°$ (fig. 18).

Trouver les trajectoires orthogonales pour les familles de courbes suivantes :

249. $y^2 + 2ax = 0$, $a > 0$.

250. $y = ax^n$, a est un paramètre.

251. $y = ae^{\sigma x}$, $\sigma = \text{const}$.

252. $\cos y = ae^{-x}$.

253. $x^2 + \frac{1}{2} y^2 = a^2$.

254. $x^2 - y^2 = a^2$.

255. $x^k + y^k = a^k$.

256. $x^2 + y^2 = 2ay$.

257. $x^2 - \frac{1}{3} y^2 = a^2$.

258. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

259. $y^2 = 4(x - a)$.

§ 11. Solutions singulières des équations différentielles

On dit qu'une solution $y = \varphi(x)$ d'une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

est *singulière* s'il n'y a d'unicité en aucun de ses points, c'est-à-dire si par chacun de ses points (x_0, y_0) il passe, en plus de cette solution, encore une autre solution qui a au point (x_0, y_0) la même tangente que la solution $y = \varphi(x)$ mais qui ne coïncide pas avec cette solution dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point (x_0, y_0). Le graphique de la solution singulière sera appelé *courbe intégrale singulière* de l'équation (1). Si la fonction $F(x, y, y')$ et ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sont continues en tous les arguments x, y, y', toute solution singulière de l'équation (1) vérifie aussi l'équation

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

Par conséquent, pour rechercher les solutions singulières de l'équation (1), il faut éliminer y' entre les équations (1) et (2).

L'équation obtenue après l'élimination de y' entre (1) et (2)

$$\psi(x, y) = 0 \tag{3}$$

s'appelle *p-discriminant de l'équation* (1), alors que la courbe définie par l'équation (2) s'appelle *courbe de p-discriminant* (en abrégé CPD).

Il arrive souvent que la CPD se compose de plusieurs branches. Dans un tel cas, il faut établir si chacune des branches prises isolément est solution de l'équation (1) et, dans l'affirmative, si elle est une solution singulière, autrement dit si la condition d'unicité n'est satisfaite en aucun de ses points.

Exemple 1. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$xy' + y'^2 - y = 0. \tag{4}$$

Solution. a). Trouvons la courbe de p-discriminant. Dans le cas actuel on a

$$F(x, y, y') \equiv xy' + y'^2 - y,$$

et la condition (2) prend la forme

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv x + 2y' = 0,$$

d'où $y' = -x/2$. En portant cette expression de y' dans l'équation (4), on obtient

$$y = -\frac{x^2}{4}. \tag{5}$$

La courbe (5) est une courbe de p-discriminant de l'équation (4) : elle ne se compose que d'une seule branche qui est une parabole.

b). Vérifions si la courbe de p-discriminant est solution de l'équation donnée. En portant (5) et sa dérivée dans (4), on s'assure que $y = -x^2/4$ est solution de l'équation (4).

c). Vérifions si la solution (5) est une solution singulière de l'équation (4). A cet effet, cherchons la solution générale de l'équation (4). Ecrivons (4) sous la forme $y = xy' + y'^2$. C'est une équation de Clairaut. Sa solution générale est

$$y = Cx + C^2. \tag{6}$$

Ecrivons les conditions de tangence de deux courbes $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$ au point d'abscisse $x = x_0$:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \qquad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{7}$$

La première égalité exprime la coïncidence des ordonnées des courbes et la deuxième celle des coefficients angulaires des tangentes à ces courbes au point d'abscisse $x = x_0$.

En posant $y_1(x) = -\frac{x^2}{4}$, $y_2(x) = Cx + C^2$, on trouve que la condition (7) prend la forme

$$-\frac{x_0^2}{4} = Cx_0 + C^2, \qquad -\frac{x_0}{2} = C. \tag{8}$$

En portant $C = -x_0/2$ dans la première des égalités (8), on obtient

$$-\frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^2}{4}, \quad \text{ou} \quad -\frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0^2}{4},$$

c'est-à-dire pour $C = -x_0/2$ la première égalité est vérifiée identiquement, car x_0 est l'abscisse d'un point quelconque.

Ainsi, en tout point de la courbe (5) il existe une autre courbe de la famille (6) qui lui est tangente, à savoir celle pour laquelle $C = -x_0/2$. Par suite, $y = -x^2/4$ est une solution singulière de l'équation (4).

d). Interprétation géométrique.

La solution générale de l'équation (4) est une famille de droites (6), alors que la solution singulière (5) est l'enveloppe de cette famille de droites (fig. 19). ◆

On appelle *enveloppe d'une famille de courbes*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (9)$$

une courbe telle qu'en tout point elle est tangente à une certaine courbe de la famille (9) et dont chaque tronçon est tangent à une infinité de courbes de la famille (9) *).

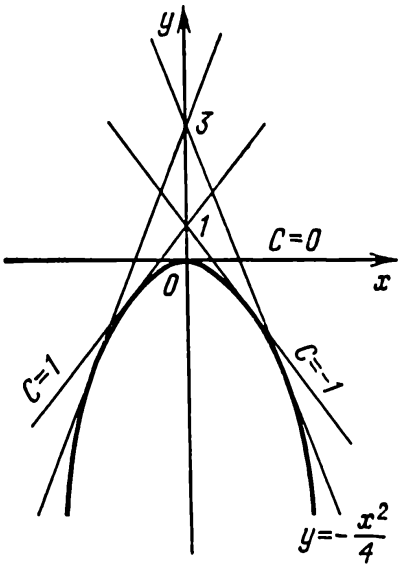

Fig. 19

Si (9) est l'intégrale générale de l'équation (1), l'enveloppe de la famille de courbes (9), si elle existe, sera une courbe intégrale singulière de cette équation. En effet, aux points de l'enveloppe les valeurs de x, y, y' coïncident avec les valeurs de x, y, y' pour la courbe intégrale qui est tangente à l'enveloppe au point (x, y) et par conséquent, en tout point de l'enveloppe les valeurs de x, y, y' vérifient l'équation $F(x, y, y') = 0$, ce qui veut dire que l'enveloppe est une courbe intégrale.

Ensuite, en aucun point de l'enveloppe il n'y a d'unicité car par les points de l'enveloppe il passe, dans une même direction, au moins deux courbes intégrales : l'enveloppe elle-même et une courbe intégrale de la famille (9) tangente à l'enveloppe au point considéré. Par suite, l'enveloppe est une courbe intégrale singulière.

Dans le cours d'analyse mathématique on apprend que l'enveloppe fait partie de la courbe de C-discriminant (en abrégé CCD) définie par le système d'équations

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Une certaine branche de la CCD sera nécessairement enveloppe si 1) il existe sur elle des dérivées partielles bornées en module

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant N, \qquad (11)$$

*) Nous dirons que les courbes Γ_1 et Γ_2 sont tangentes en un point M_0 si elles possèdent en ce point une tangente commune.

où M et N sont des constantes;

$$2)\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0. \tag{12}$$

Remarque. Les conditions 1) et 2) ne sont que suffisantes de sorte que les branches de la CCD sur lesquelles l'une de ces conditions n'est pas satisfaite peuvent être elles aussi enveloppes.

Exemple 2. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0, \qquad x > 0 \tag{13}$$

connaissant son intégrale générale

$$x^2 = C\,(y - C). \tag{14}$$

Solution. a). Cherchons la courbe de C-discriminant. On a

$$\Phi\,(x,\ y,\ C) \equiv C\,(y - C) - x^2,$$

si bien que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} \equiv y - 2C,$$

d'où $C = y/2$. En portant cette valeur de C dans (14), on obtient

$$x^2 = \frac{y}{2}\left(y - \frac{y}{2}\right),$$

d'où

$$(y - 2x)\,(y + 2x) = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm 2x. \tag{15}$$

C'est une courbe de C-discriminant : elle se compose de deux droites $y = 2x$ et $y = -2x$.

b). On vérifie directement que chacune des branches de la CCD est solution de l'équation (13).

c). Montrons que chacune des solutions (15) est une solution singulière de l'équation (13). En effet, puisque

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = C,$$

on a sur chacune des branches de la CCD

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right| = |-2x| \leqslant 2b$$

(on suppose que la solution $y\,(x)$ de l'équation (13) est considérée sur l'intervalle $0 < a \leqslant x \leqslant b$),

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right| = |C| \leqslant N; \text{ ici, } N = \max_{C \in G} |C|,$$

où G est le domaine des valeurs admissibles de C.

Notons que sur chacune des branches de la CCD on a $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x \neq 0$ dans le domaine de $x > 0$, si bien que l'une des conditions (12) est satisfaite. Cela signifie que les conditions (11) et (12) sont réalisées et donc les droites (15) sont des enveloppes des paraboles (14).

Ainsi, nous avons établi que chacune des solutions (15) est une solution singulière. ◆

Pour la recherche des solutions singulières il est commode de se servir des schémas symboliques suivants:

$$\mathrm{CPD} \equiv \mathrm{E} \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{C}^2 = 0, \tag{16}$$

$$\mathrm{CCD} \equiv \mathrm{E} \cdot \mathrm{N}^2 \cdot \mathrm{P}^3 = 0. \tag{17}$$

Le schéma (16) signifie que l'équation de la courbe de p-discriminant peut se décomposer en trois équations:

1) $\mathrm{E} = 0$ est l'équation de l'enveloppe;

2) $\mathrm{P} = 0$ est l'équation du lieu géométrique des points pinces (des points de rebroussement);

3) $\mathrm{C} = 0$ est l'équation du lieu géométrique des points de contact des courbes intégrales et le facteur C figure dans la CPD à la deuxième puissance.

Le schéma (17) signifie que l'équation de la courbe de C-discriminant peut se décomposer en trois équations:

1) $\mathrm{E} = 0$ est l'équation de l'enveloppe;

2) $\mathrm{N} = 0$ est l'équation du lieu géométrique des points nodaux, le facteur N apparaissant dans la CCD à la deuxième puissance;

3) $\mathrm{P} = 0$ est l'équation du lieu géométrique des points pinces, le facteur P figurant dans la CCD à la troisième puissance.

Il n'est pas nécessaire que pour chaque problème toutes les parties intégrantes des courbes CPD et CCD figurent dans les relations (16) et (17).

De tous les lieux géométriques, seule l'enveloppe est une solutions singulière de l'équation différentielle. La recherche de l'enveloppe se trouve simplifiée du fait que dans les schémas (16) et (17) elle ne figure qu'à la première puissance.

Pour ce qui est des autres lieux géométriques (des points pinces, des points nodaux et des points de contact) il est nécessaire de procéder dans chaque cas concret à une analyse supplémentaire. Le fait qu'un certain facteur figure dans la CPD au carré (et ne figure pas dans la CCD) signifie qu'il peut y avoir un lieu géométrique des points de contact des courbes intégrales. D'une manière analogue, si un certain facteur apparaît au carré dans la CCD (et ne figure pas dans la CPD) il peut y avoir un lieu géométrique des points nodaux. Enfin, si un certain facteur figure à la première puissance dans la CPD et à la troisième puissance dans la CCD il peut y avoir un lieu géométrique des points pinces.

Exemple 3. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$2y\,(y' + 2) - xy'^2 = 0. \tag{18}$$

Solution. Une solution singulière, si elle existe, est définie par le système

$$\begin{cases} 2y\,(y'+2) - xy'^2 = 0, \\ 2y - 2xy' = 0, \end{cases} \tag{19}$$

où la deuxième équation (19) est obtenue à partir de (18) par sa dérivation par rapport à y'. En éliminant y', on obtient la courbe de p-discriminant

$$y^2 + 4xy = 0$$

qui se divise en deux branches:

$$y = 0, \tag{20}$$

$$y = -4x. \tag{21}$$

On vérifie par une simple substitution que les deux fonctions sont solutions de l'équation (18).

Pour établir si les solutions (20) et (21) sont singulières ou non, cherchons l'enveloppe de la famille

$$Cy - (C - x)^2 = 0 \tag{22}$$

qui est l'intégrale générale de l'équation (18).

Ecrivons le système pour déterminer la courbe de C-discriminant

$$\begin{cases} Cy - (C - x)^2 = 0, \\ y - 2\,(C - x) = 0, \end{cases}$$

d'où, en éliminant C, on obtient:

$$y^2 + 4xy = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = -4x,$$

ce qui coïncide avec (20) et (21). Du fait que sur les lignes (20) et (21) les conditions (11) et (12) sont satisfaites, on déduit que les lignes $y = 0$ et $y = -4x$ sont des enveloppes et, par conséquent, (20) et (21) sont des solutions singulières de l'équation donnée.

Les courbes intégrales (22) sont des paraboles $y = \frac{(C-x)^2}{C}$ et les lignes $y = 0$ et $y = -4x$ sont des enveloppes de cette famille de paraboles (fig. 20).

Exemple 4. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$y'^2 = 4x^2. \tag{23}$$

Solution. En dérivant (23) par rapport à y', il vient

$$2y' = 0. \tag{24}$$

En éliminant y' entre (23) et (24), on obtient $x^2 = 0$. La courbe de discriminant est l'axe des ordonnées. Elle n'est pas une courbe intégrale de l'équation (23) mais, d'après le schéma (16), elle peut constituer le lieu géométrique des points de contact des courbes intégrales.

Les solutions de l'équation (23) sont des paraboles

$$y = x^2 + C, \qquad y = -x^2 + C$$

et celles des courbes lisses qui peuvent être composées à partir de leurs parties (fig. 21).

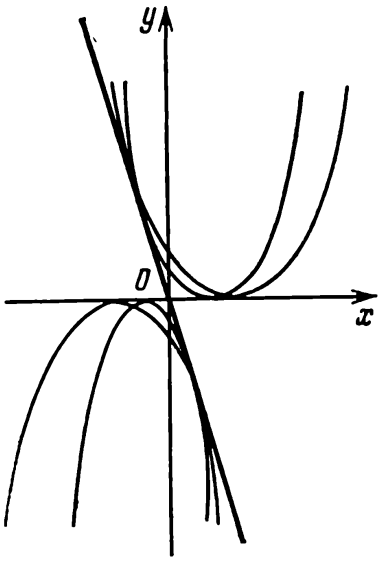

Fig. 20

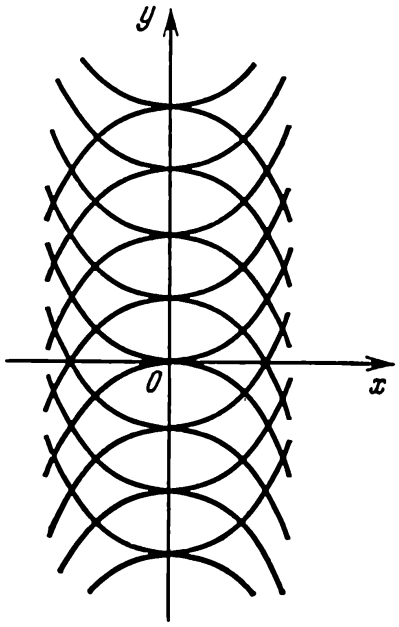

Fig. 21

L'examen du dessin montre que la droite $x = 0$ est réellement le lieu géométrique des points de contact des courbes intégrales de l'équation (23).

Exemple 5. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$y'^2 (2 - 3y)^2 = 4 (1 - y). \tag{25}$$

Solution. Cherchons la CPD. En éliminant y' entre les équations du système

$$\begin{cases} y'^2 (2 - 3y)^2 - 4 (1 - y) = 0, \\ 2y' (2 - 3y)^2 = 0, \end{cases}$$

on obtient

$$(2 - 3y)^2 (1 - y) = 0. \tag{26}$$

En mettant l'équation (25) sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}},$$

on trouve son intégrale générale

$$y^2(1-y) = (x-C)^2.$$

Cherchons la CCD. En éliminant C entre les équations du système

$$\begin{cases} y^2(1-y) - (x-C)^2 = 0, \\ 2(x-C) = 0, \end{cases}$$

on aura

$$y^2(1-y) = 0. \tag{27}$$

Ainsi, des (26) et (27) on tire

$$\text{CPD} \equiv (1-y)(2-3y)^2 = 0,$$
$$\text{CCD} \equiv (1-y)\,y^2 = 0.$$

Le facteur $1 - y$ figure dans la courbe de p-discriminant et dans la courbe de C-discriminant à la première puissance et donne une

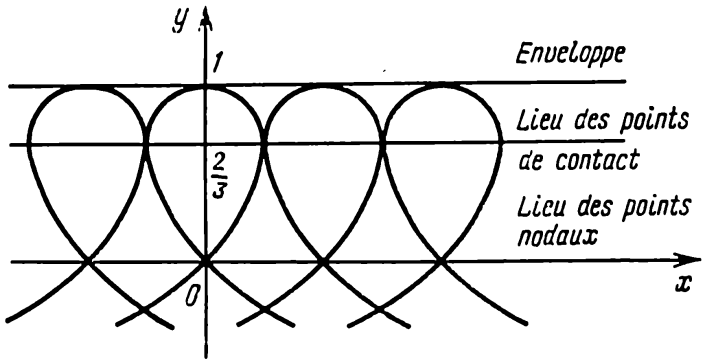

Fig. 22

enveloppe, ce qui signifie que la fonction $y = 1$ est une solution singulière de l'équation (25). On vérifie par une substitution directe que $y = 1$ satisfait réellement à l'équation.

L'équation $2 - 3y = 0$ figurant à la deuxième puissance dans le p-discriminant et ne rentrant pas dans le C-discriminant donne le lieu des points de contact (C^2).

Enfin, l'équation $y = 0$ figurant à la deuxième puissance dans le C-discriminant et n'apparaissant pas dans le p-discriminant donne le lieu des points nodaux (N^2) (fig. 22).

Exemple 6. Trouver des solutions singulières de l'équation différentielle

$$3y = 2xy' - \frac{2}{x}y'^2. \tag{28}$$

Solution. a) Cherchons la courbe de p-discriminant. En dérivant (28) par rapport à y', on obtient

$$0 = 2x - \frac{4}{x} y', \qquad \text{d'où} \qquad y' = \frac{x^2}{2}. \tag{29}$$

En portant (29) dans (28), on trouve l'équation de la CPD :

$$\text{CPD} \equiv 6y - x^3 = 0. \tag{30}$$

b) Cherchons l'intégrale générale de l'équation (28). En désignant y' par p, écrivons (28) sous la forme

$$3y = 2xp - \frac{2}{x} p^2. \tag{31}$$

En dérivant les deux membres de (28) par rapport à x et en tenant compte du fait que $y' = p$, on aura

$$px^2 - 2p^2 = (2x^3 - 4px) \frac{dp}{dx}, \qquad \text{d'où}$$

$$(x^2 - 2p) \left(p - 2x \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

En annulant le premier facteur $x^2 - 2p = 0$, on obtient (29) et la relation $p - 2x \frac{dp}{dx} = 0$ donne

$$Cx = p^2. \tag{32}$$

En éliminant le paramètre p entre les équations (31) et (32), on trouve la solution générale de l'équation (28) :

$$(3y + 2C)^2 = 4Cx^3. \tag{33}$$

c) Cherchons la courbe de C-discriminant. Dérivons (33) par rapport à C, il vient

$$2C = x^3 - 3y. \tag{34}$$

En portant (34) dans (33), on obtient l'équation de la CCD :

$$\text{CCD} \equiv (6x - x^3)\, x^3 = 0.$$

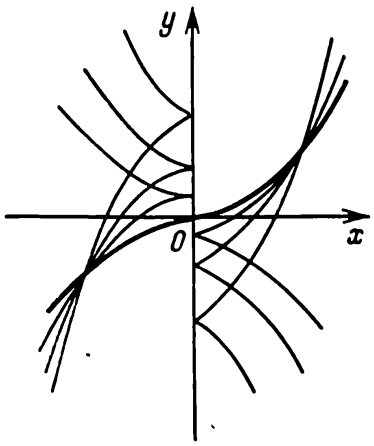

Fig. 23

D'après les schémas symboliques (16) et (17) on conclut que $6y - x^3 = 0$ est l'enveloppe de la famille de paraboles semi-cubiques (33) et $x = 0$ est le lieu géométrique des points pinces (le facteur x figure dans l'équation de la CCD à la troisième puissance) (fig. 23). On vérifie par la substitution dans l'équation (28) que $y = x^3/6$ est solution alors que $x = 0$ n'est pas une solution (pour $x = 0$ l'équation (28) n'a pas de sens). Ainsi, la solution $y = x^3/6$

est une solution singulière (enveloppe de la famille de courbes intégrales).

Dans les exemples qui suivent, trouver des solutions singulières si elles existent :

260. $(1 + y'^2)\, y^2 - 4yy' - 4x = 0.$

261. $y'^2 - 4y = 0.$

262. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$

263. $y'^2 - y^2 = 0.$

264. $y' = \sqrt[3]{y^2} + a.$ Pour quelle valeur du paramètre a cette équation a-t-elle une solution singulière ?

265. $(xy' + y)^2 + 3x^5\,(xy' - 2y) = 0.$

266. $y\,(y - 2xy')^2 = 2y'.$

267. $8y'^3 - 12y'^2 = 27\,(y - x).$

268. $(y' - 1)^2 = y^2.$

En utilisant le C-discriminant, trouver des solutions singulières des équations du premier ordre connaissant leurs intégrales générales.

269. $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}, \quad y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}.$

270. $(xy' + y)^2 = y^2y', \quad y\,(C - x) = C^2.$

271. $y^2y'^2 + y^2 = 1, \quad (x - C)^2 + y^2 = 1.$

272. $y'^2 - yy' + e^x = 0, \quad y = C\,e^x + \frac{1}{C}.$

273. $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0, \quad x^2 + C\,(x - 3y) + C^2 = 0.$

274. $y = xy' + \sqrt{a^2y'^2 + b^2}, \quad y = Cx + \sqrt{a^2C^2 + b^2}.$

§ 12. Problèmes divers

Intégrer les équations suivantes :

275. $y' = (x - y)^2 + 1.$

276. $x \sin x \cdot y' + (\sin x - x \cos x)\, y = \sin x \cos x - x.$

277. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x, \; n \neq 1.$

278. $(x^3 - 3xy^2)\, dx + (y^3 - 3x^2y)\, dy = 0.$

279. $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\, dx + (y^2 - 8xy + 2{,}5x^2)\, dy = 0.$

280. $(3xy^2 - x^2)\, dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)\, dy = 0.$

281. $(y - xy^2 \ln x)\, dx + x dy = 0, \quad \mu = \varphi\,(x \cdot y).$

282. $(2xy\, e^{x^2} - x \sin x)\, dx + e^{x^2}\, dy = 0.$

283. $y' = \frac{1}{2x - y^2}.$

284. $x^2 + xy' = 3x + y'$.

285. $xyy' - y^2 = x^4$.

286. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$.

287. $(2x - 1)\, y' - 2y = \frac{1 - 4x}{x^2}$.

288. $(x - y + 3)\, dx + (3x + y + 1)\, dy = 0$.

289. $y' + \cos\frac{x+y}{2} = \cos\frac{x-y}{2}$.

290. $y'\,(3x^2 - 2x) - y\,(6x - 2) = 0$.

291. $xy^2y' - y^3 = \frac{1}{3}x^4$.

292. $(1 + e^{\frac{x}{y}})\, dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0,\ y|_{x=1} = 1$.

293. $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

294. $(x - y + 2)\, dx + (x - y + 3)\, dy = 0$.

295. $(xy^2 + y)\, dx - x\, dy = 0$.

296. $(x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2y\, dy = 0$.

297. $(x - 1)\,(y^2 - y + 1)\, dx = (y + 1)\,(x^2 + x + 1)\, dy$.

298. $(x - 2xy - y^2)\, y' + y^2 = 0$.

299. $y \cos x\, dx + (2y - \sin x)\, dy = 0$.

300. $y' - 1 = e^{x+2y}$.

301. $2\,(x^5 + 2x^3y - y^2x)\, dx + (y^2 + 2x^2y - x^4)\, dy = 0$.

302. $x^2y^ny' = 2xy' - y, \quad n \neq -2$.

303. $[3\,(x + y) + a^2]\, y' = 4\,(x + y) + b^2$.

304. $(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$.

305. $xy' + y = y^2 \ln x,\ y|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

306. $\sin(\ln x)\, dx - \cos(\ln y)\, dy = 0$.

307. $y' = \sqrt{\frac{9y^2 - 6y + 2}{x^2 - 2x + 5}}$.

308. $(5x - 7y + 1)\, dy + (x + y - 1)\, dx = 0$.

309. $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0,\ y|_{x=1} = 2$.

310. $y^3dx + 2\,(x^2 - xy^2)\, dy = 0$.

311. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

312. Montrer qu'une courbe symétrique de la courbe intégrale de l'équation $4x^2y'^2 - y^2 = xy^3$ par rapport au centre $O\,(0, 0)$ sera aussi une courbe intégrale de cette équation.

313. Trouver des lignes intégrales de l'équation différentielle $y' + xy'^2 - y = 0$ qui sont des droites.

314. Trouver une courbe sachant que l'aire de la surface, comprise entre les axes des coordonnées, cette courbe et l'ordonnée de tout point de cette courbe, est égale au cube de cette ordonnée.

315. L'aire de la surface comprise entre une courbe, les axes des coordonnées et l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe est numériquement égale à la longueur de l'arc correspondant de la courbe. Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par un point M (0, 1).

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRES SUPÉRIEURS

§ 13. Notions fondamentales et définitions

Une équation différentielle d'ordre n est de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ou encore, si elle est résolue par rapport à $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Le problème qui consiste à trouver une solution $y = \varphi(x)$ de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

s'appelle *problème de Cauchy* pour l'équation (1).

Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. *Si, dans l'équation* (1), *la fonction* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

a) *est continue en tous ses arguments* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *dans un certain domaine* D *de leur variation*;

b) *possède dans le domaine* D *des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *par rapport aux arguments* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$,

alors il existe un intervalle $x_0 - h < x < x_0 + h$ *dans lequel il existe une solution unique* $y = \varphi(x)$ *de l'équation* (1) *qui satisfait aux conditions*

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

où les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ *sont comprises dans le domaine* D.

Pour une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$ les conditions initiales sont de la forme

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres donnés. Dans ce cas, le théorème d'existence et d'unicité signifie *géométriquement* que par un point

donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy il ne passe qu'une seule courbe dont la pente de la tangente a la valeur donnée y'_0.

Considérons, par exemple, l'équation $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$ et les conditions initiales

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Dans ce cas, $f(x, y, y') \equiv \sin y' + e^{-x^2 y}$. Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, y, y'. Ses dérivées partielles par rapport à y et y' sont respectivement égales à

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

et sont partout des fonctions continues et bornées de leurs arguments. Par suite, quelles que soient les conditions initiales

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

il existe toujours une solution et une seule de cette équation qui satisfait à ces conditions. ◆

On appelle *solution générale* d'une équation différentielle d'ordre n (1) l'ensemble de toutes ses solutions définies par la formule $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ contenant n constantes arbitraires C_1, $C_2, \ldots, C_n$ telles que si les conditions initiales (2) sont données, il existe des valeurs $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ telles que $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n)$ seront solutions de l'équation (1) satisfaisant à ces conditions initiales.

Toute solution obtenue à partir de la solution générale pour des valeurs concrètes des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$ s'appelle *solution particulière* de l'équation différentielle (1).

Une équation de la forme $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ qui définit de façon implicite la solution générale de l'équation différentielle s'appelle *intégrale générale de cette équation*. En donnant aux constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des valeurs numériques concrètes admissibles, on obtient une *intégrale particulière* de l'équation différentielle. Le graphique de solution particulière ou d'intégrale particulière s'appelle *courbe intégrale* de l'équation différentielle donnée.

Exemple 1. Montrer que $y = C_1 x + C_2$ est la solution générale de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Solution. Montrons que $y = C_1 x + C_2$ vérifie l'équation donnée pour toutes les valeurs des constantes C_1 et C_2. En effet, on a $y' = C_1$, $y'' = 0$.

Soient données maintenant les conditions initiales quelconques $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$. Montrons que les constantes C_1 et C_2 peuvent être choisies de manière que $y = C_1 x + C_2$ satisfasse à ces conditions. On a $y = C_1 x + C_2$, $y' = C_1$. En posant $x = x_0$, on

obtient un système

$$\begin{cases} y_0 = C_1 x_0 + C_2, \\ y_0' = C_1, \end{cases}$$

qui permet de définir univoquement $C_1 = y_0'$ et $C_2 = y_0 - x_0 y_0'$. Ainsi, la solution $y = y_0'(x - x_0) + y_0$ satisfait aux conditions initiales données. Géométriquement, cela signifie que par tout point $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy il ne passe qu'une seule droite ayant le coefficient angulaire donné y_0'.

La donnée d'une seule condition initiale, par exemple $y|_{x=x_0} = y_0$, définit un faisceau de droites ayant pour centre le point $M_0(x_0, y_0)$, c'est-à-dire qu'une seule condition initiale ne suffit pas pour dégager l'unique solution.

316. L'équation différentielle $y'' = 2\sqrt{y'}$ possède deux solutions $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) \equiv x^3/3$ qui satisfont aux conditions initiales $y|_{x=x_0} = 0$, $y'|_{x=x_0} = 0$. Pourquoi ce résultat n'est-il pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy?

317. Les graphiques de deux solutions d'une équation donnée sur le plan xOy peuvent-ils être tangents en un certain point (x_0, y_0) pour l'équation : a) $y' = x^2 + y^2$; b) $y'' = x^2 + y^2$; c) $y''' = x^2 + y^2$?

Dans les problèmes qui suivent, montrer que les fonctions données sont solutions des équations indiquées :

318. $y = x(\sin x - \cos x)$, $y'' + y = 2(\cos x + \sin x)$.

319. $y = x^2 \ln x$, $xy''' = 2$.

320. $x + C = e^{-y}$, $y'' = y'^2$.

321. $\begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = te^t, \end{cases}$ $\quad (x - 1)\, y'' = 1.$

322. $\begin{cases} x = C_1 + \dfrac{t^4}{4}, \\ y = C_2 + \dfrac{t^5}{5}, \end{cases}$ $\quad y''y'^3 = 1.$

Montrer que les fonctions données sont les solutions générales des équations correspondantes :

323. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $\quad y'' + y = 0$.

324. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$, $\quad y'' - 3y' + 2y = 2$.

Montrer que les relations données sont des intégrales (générales ou particulières) des équations indiquées :

325. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$,
$y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$,

326. $y^2 = 1 + (1 - x)^2$, $\quad y'^2 + yy'' = 1$,

§ 14. Equations différentielles admettant un abaissement de l'ordre

Indiquons quelques types d'équations différentielles qui admettent un abaissement de leur ordre.

I. L'équation de la forme $y^{(n)} = f(x)$. Après l'avoir intégrer successivement n fois on obtient la solution générale

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ldots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

II. L'équation ne contient pas de fonction cherchée ni de ses dérivées jusqu'à l'ordre $k - 1$ y compris :

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

L'ordre d'une telle équation peut être réduit de k unités par la substitution $y^{(k)}(x) = p(x)$. Alors l'équation (1) prend la forme

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

De cette dernière équation on définit, si c'est possible, $p = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ et ensuite on trouve y de l'équation $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ en l'intégrant k fois.

III. L'équation ne contient pas de variable indépendante :

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

La substitution $y' = p$ permet d'abaisser l'ordre de l'équation d'une unité. Dans ce cas p est considéré comme une nouvelle fonction inconnue de y : $p = p(y)$. Toutes les dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ s'expriment par des dérivées de la nouvelle fonction p par rapport à y :

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \text{ etc.}$$

En introduisant ces expressions dans l'équation au lieu des dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, on obtient une équation différentielle du $(n-1)$-ième ordre.

IV. L'équation $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ est homogène par rapport aux arguments $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, c'est-à-dire

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

L'ordre d'une telle équation peut être abaissé d'une unité par la substitution $y = e^{\int z dx}$, où z est une nouvelle fonction inconnue de x: $z = z(x)$.

V. L'équation écrite en différentielles

$$F(x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^{(n)}y) = 0,$$

dans laquelle la fonction F est homogène par rapport à ses arguments x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny si l'on considère que x et dx sont du premier degré et y, dy, d^2y, etc., sont de degré m. Alors $\frac{dy}{dx}$ sera de degré $m-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de degré $m-2$, etc.

Pour abaisser l'ordre, on effectue la substitution $x = e^t$, $y = ue^{mt}$. Il en résulte une équation différentielle entre u et t qui ne contient pas de t sous forme explicite, c'est-à-dire admettant un abaissement de l'ordre d'une unité (cas III).

Considérons des exemples illustrant les divers cas d'abaissement de l'ordre des équations différentielles.

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation $y''' = \sin x + \cos x$.

Solution. En intégrant successivement cette équation, on a:

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$$
$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$ et dégager une solution qui satisfait aux conditions initiales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$, $y''|_{x=1} = 2$.

Solution. Intégrons cette équation successivement trois fois, il vient

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1,$$
$$y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2, \qquad (1)$$
$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Cherchons une solution satisfaisant aux conditions initiales données. Portons les conditions initiales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$, $y''|_{x=1} = 2$ dans (1), on aura

$$\frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0, \qquad C_1 + C_2 = 1, \qquad -1 + C_1 = 2.$$

D'où $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $C_3 = 1/2$. La solution cherchée sera

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

Exemple 3. Résoudre l'équation $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

Solution. Cette équation ne contenant pas de fonction cherchée y ni de sa dérivée, posons $y'' = p$. Après cela l'équation prend la forme

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

En séparant les variables et intégrant, on obtient

$$p = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Remplaçons p par y'', il vient

$$y'' = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

En intégrant successivement, on aura

$$y' = \frac{e^{x+C_1} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2x + C_3.$$

ou

$$y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2x + C_3.$$

Exemple 4. Résoudre l'équation $xy^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} = 0$.

Solution. L'équation ne contient pas de fonction cherchée ni de ses dérivées jusqu'au troisième ordre y compris. Dès lors, en posant $y^{\mathrm{IV}} = p$, on obtient

$$x\frac{dp}{dx} - p = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = C_1x, \qquad y^{\mathrm{IV}} = C_1x.$$

En intégrant successivement, on trouve

$$y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2, \qquad y'' = C_1\frac{x^3}{6} + C_2x + C_3,$$

$$y' = C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,$$

$$y = C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

ou

$$y = \overline{C}_1x^5 + \overline{C}_2x^3 + \overline{C}_3x^2 + C_4x + C_5,$$

où $\overline{C}_1 = \overline{C}_1/120$, $\overline{C}_2 = \overline{C}_2/6$, $\overline{C}_3 = \overline{C}_3/2$.

Exemple 5. Résoudre l'équation $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Solution. L'équation ne contient pas de variable indépendante x. En posant $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, on obtient une équation de Bernoulli

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

En effectuant la substitution $p^2 = z$, on la ramène à une équation linéaire

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

dont la solution générale est $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$. En remplaçant z par $p^2 = y'^2$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Séparons les variables et intégrons, il vient

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}, \qquad \text{d'où} \qquad e^y + \widetilde{C}_1 = (x + C_2)^2,$$

où $\widetilde{C}_1 = C_1/4$. C'est l'intégrale générale de l'équation donnée.

Exemple 6. Résoudre l'équation $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

Solution. L'équation donnée est homogène par rapport à y, y', y''. L'ordre de cette équation se trouve réduit d'une unité par la substitution $y = e^{\int z dx}$, où z est une nouvelle fonction inconnue de x. On a

$$y' = ze^{\int z\,dx}, \qquad y'' = (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx}.$$

En portant l'expression de y, y', y'' dans l'équation, on obtient

$$x^2(z' + z^2)\,e^{2\int z\,dx} = (e^{\int z\,dx} - xz\,e^{\int z\,dx})^2.$$

Simplifions par $e^{2\int z\,dx}$, il vient

$$x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2, \qquad \text{ou} \qquad x^2z' + 2xz = 1.$$

C'est une équation linéaire. Son premier membre peut s'écrire sous la forme $(x^2z)' = 1$, d'où

$$x^2z = x + C_1, \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Calculons l'intégrale

$$\int z\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx = \ln|x| - \frac{C_1}{x^2} + \ln C_2.$$

La solution générale de l'équation donnée sera

$$y = e^{\int z\,dx} = e^{\ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2}, \qquad \text{ou} \qquad y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

En outre, cette équation possède une solution évidente $y = 0$ qui est obtenue de la solution générale pour $C_2 = 0$.

Exemple 7. Résoudre l'équation $x^3y'' = (y - xy')^2$.

Solution. Montrons que c'est une équation homogène généralisée. En considérant x, y, y', y'' comme étant de degrés 1, m, $(m - 1)$ et $(m - 2)$ respectivement et en égalant les degrés de tous les termes, on obtient

$$3 + (m - 2) = 2m, \tag{2}$$

d'où $m = 1$. La résolubilité de l'équation (2) est la condition d'homogénéité généralisée de l'équation.

Effectuons la substitution $x = e^t$, $y = ue^t$. Puisque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{du}{dt} + u\right)e^t}{e^t} = \frac{du}{dt} + u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}}{e^t} = e^{-t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right),$$

l'équation donnée prend, après la simplification par le facteur e^{2t}, la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

En posant $\frac{du}{dt} = p$, $\frac{d^2u}{dt^2} = p\frac{dp}{du}$, on obtient $p\frac{dp}{du} + p = p^2$. D'où $p = 0$ ou $\frac{dp}{du} + 1 = p$. L'intégration de la deuxième équation donne

$$p = 1 + C_1 e^u, \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dt} = 1 + C_1 e^u.$$

La solution générale de cette équation est

$$u = \ln\frac{e^t}{C_1 e^t + C_2}.$$

En revenant aux variables x et y, on obtient la solution générale de l'équation donnée

$$y = x \ln\frac{x}{C_1 x + C_2}.$$

Le cas de $p = 0$ donne $u = C$ ou $y = Cx$ qui est une solution particulière obtenue à partir de la solution générale pour $C_1 = e^{-C}$; $C_2 = 0$.

Remarque. En résolvant le problème de Cauchy pour les équations d'ordre supérieur il est raisonnable de déterminer les valeurs des constantes C_i au cours de la résolution et non pas après la recherche de la solution générale de l'équation. Un tel procédé permet de faciliter la résolution du problème et en outre il peut s'avérer que l'intégration se simplifie considérablement lorsque les constantes C_i prennent des valeurs numériques concrètes, alors que pour des constantes C_i arbitraires l'intégration devient difficile et même parfois impossible à réaliser en fonctions élémentaires.

Exemple 8. Résoudre le problème de Cauchy $y'' = 2y^3$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

Solution. En posant $y' = p$, on obtient

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^3,$$

d'où

$$p^2 = y^4 + C_1, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Séparons les variables, il vient

$$x + C_2 = \int (y^4 + C_1)^{-\frac{1}{2}}\, dy.$$

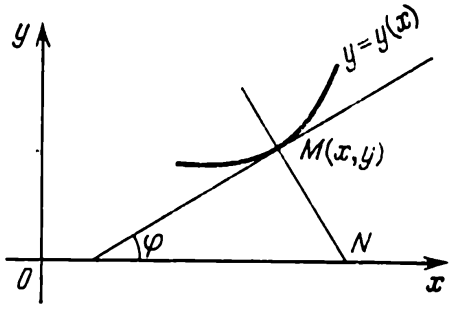

Fig. 24

Au second membre de la dernière égalité nous avons une intégrale du binôme différentiel. Ici, $m = 0$, $n = 4$, $p = -1/2$, c'est-à-dire on a le cas non intégrable.

Par conséquent, cette intégrale ne s'exprime pas sous forme d'une combinaison finie de fonctions élémentaires. Pourtant si l'on utilise les conditions initiales, on obtient $C_1 = 0$. Alors, $\frac{dy}{dx} = y^2$, d'où, compte tenu des conditions initiales, on trouve finalement $y = \frac{1}{1-x}$.

Exemple 9. Trouver les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la longueur de la normale.

Solution. Soit $y = y(x)$ l'équation de la courbe cherchée. Son rayon de courbure $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$. La longueur de la normale MN à la courbe (fig. 24) : $MN = |y|\sqrt{1+y'^2}$.

La propriété déterminante de la courbe est définie par l'équation différentielle

$$\frac{1+y'^2}{y''} = ky, \tag{3}$$

où k est un coefficient de proportionnalité pouvant prendre des valeurs tant positives que négatives. Ecrivons l'équation (3) sous la forme

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2} = \frac{2y'}{ky}.$$

Intégrons, il vient

$$\ln(1+y'^2)=\frac{2}{k}(\ln|y|+\ln C_1), \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}.$$

En séparant les variables et en intégrant encore une fois, on obtient

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{2/k}-1}}$$

qui est l'intégrale générale de l'équation initiale (3).

Considérons certains cas particuliers

1) $k=-1$. On a

$$x+C_2=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}},$$

et, après l'intégration,

$$x+C_2=-\sqrt{C_1^2-y^2}.$$

On en déduit $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$. Les courbes cherchées sont des circonférences de rayons arbitraires et de centres sur l'axe Ox.

2) $k=-2$. Dans ce cas on a l'équation

$$x+C_2=\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy.$$

En posant $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$, on obtient

$$\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy=\frac{C_1}{2}(t-\sin t).$$

Ainsi, les courbes cherchées sont définies sous forme paramétrique par les équations:

$$x+C_2=\frac{C_1}{2}(t-\sin t), \qquad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t).$$

Ce sont des cycloïdes formés par le roulement sur l'axe Ox des cercles de rayon arbitraire.

3) $k=1$. Dans ce cas on a

$$x+C_2=C_1\int_{C_1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=C_1\ln\frac{y+\sqrt{y^2-C_1^2}}{C_1}.$$

d'où

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{\frac{x+C_2}{C_1}}, \qquad y-\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}.$$

En additionnant les égalités obtenues, on a

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right)=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1};$$

ce sont des chaînettes.

4) $k=2$. On a

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}},\qquad \text{ou}\qquad x+C_2=2C_1\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}.$$

D'où $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$; ce sont des paraboles dont les axes sont parallèles à l'axe Oy.

Intégrer les équations suivantes:

327. $y^{IV}=x$.

328. $y'''=x+\cos x$.

329. $y''(x+2)^5=1;\quad y(-1)=\frac{1}{12},\quad y'(-1)=-1/4$.

330. $y''=xe^x,\quad y(0)=y'(0)=0$.

331. $y''=2x\ln x$.

332. $xy''=y'$.

333. $xy''+y'=0$.

334. $xy''=(1+2x^2)y'$.

335. $xy''=y'+x^2$.

336. $x\ln x\cdot y''=y'$.

337. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

338. $2y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'};\quad y(1)=\frac{\sqrt{2}}{5},\quad y'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

339. $y'''=\sqrt{1-y''^2}$.

340. $xy'''-y''=0$.

341. $y''=\sqrt{1+y'^2}$,

342. $y''=y'^2$.

343. $y''=\sqrt{1-y'^2}$.

344. $y''=1+y'^2$.

345. $y''=\sqrt{1+y'}$.

346. $y''=y'\ln y';\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

347. $y''+y'+2=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-2$.

348. $y''=y'(1+y')$.

349. $3y''=(1+y'^2)^{3/2}$.

350. $y'''+y''^2=0$.

351. $yy''=y'^2$.

352. $y''=2yy';\ y(0)=y'(0)=1$.

353. $3y'y''=2y;\ y(0)=y'(0)=1$.

354. $2y''=3y^2;\ y(-2)=1,\ y'(-2)=-1$.

355. $yy''+y'^2=0$.

356. $yy''=y'+y'^2$.

357. $yy''=1+y'^2$.

358. $2yy'' = 1 + y'^2$.

359. $y^3y'' = -1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

360. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.

361. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

362. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

363. $y''' = 3yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y'''(0) = 3/2$.

364. Trouver les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale.

365. Déterminer la forme d'équilibre d'un fil non extensible soumis à l'action d'une charge telle que la force agissant sur chaque unité de la projection horizontale soit la même (chaînettes des ponts à chaînes).

366. Trouver le temps qu'un corps doit mettre pour tomber sur la Terre depuis une altitude de 400 000 km (distance approchée entre la Lune et le centre de la Terre), si cette altitude est comptée à partir du centre de la Terre et le rayon de la Terre est approximativement égal à 6400 km.

367. Etablir la loi de mouvement d'un point matériel de masse m suivant une droite OA sous l'action d'une force de répulsion inversement proportionnelle à la troisième puissance de la distance du point $x = OM$ au centre fixe O.

368. Un corps de masse m tombe depuis une certaine altitude avec une vitesse v. Au cours de sa chute le corps subit une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Trouver la loi de mouvement du corps tombant.

369. Trouver une courbe qui passe par l'origine des coordonnées et telle que l'aire du triangle formée par la tangente à la courbe en un certain point, l'ordonnée de ce point et l'axe Ox soit proportionnelle à l'aire du trapèze curviligne formé par la courbe, l'axe Ox et l'ordonnée de ce point.

370. Trouver l'équation d'une courbe dont le rayon de courbure est égal à une constante.

§ 15. Equations différentielles linéaires d'ordre n

1°. Indépendance linéaire des fonctions. Wronskien. Déterminant de Gram. Soit donné un système fini de n fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$ définies sur l'intervalle (a, b). Les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$ sont dites *linéairement dépendantes* sur l'intervalle (a, b) s'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non toutes nulles et telles que pour toutes les valeurs de x prises dans

cet intervalle on ait l'identité

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Si cette identité n'est vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ sont dites *linéairement indépendantes* sur l'intervalle (a, b).

Exemple 1. Montrer que le système de fonctions 1, x, x^2, x^3 est linéairement indépendant sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Solution. En effet, l'égalité $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$ ne peut être vérifiée pour tout $x \in (-\infty, +\infty)$ que si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Si l'un au moins de ces nombres n'est pas nul, on aura au premier membre de cette égalité un polynôme de degré non supérieur au troisième et ce polynôme ne pourra s'annuler que pour tout au plus trois valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré.

Exemple 2. Montrer que le système de fonctions $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, où k_1, k_2, k_3 sont deux à deux distincts, est linéairement indépendant sur l'intervalle $-\infty < x < +\infty$.

Solution. Raisonnons par l'absurde en supposant que le système donné soit linéairement dépendant sur cet intervalle. Alors

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} \equiv 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et l'un au moins des nombres α_1, α_2, α_3 est différent de zéro, par exemple $\alpha_3 \neq 0$. En divisant les deux membres de l'identité (1) par $e^{k_1 x}$, on aura

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0.$$

Dérivons l'identité, il vient

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0. \tag{2}$$

Divisons les deux membres de l'identité (2) par $e^{(k_2 - k_1)x}$:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0. \tag{3}$$

Dérivons (3), il vient

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0,$$

ce qui est impossible car $\alpha_3 \neq 0$ par hypothèse, $k_3 \neq k_1$, $k_3 \neq k_2$ par condition et $e^{(k_3 - k_2)x} \neq 0$.

Notre supposition sur la dépendance linéaire du système donné a abouti à une contradiction, ce qui signifie que ce système de fonctions est linéairement indépendant sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, c'est-à-dire que l'identité (1) ne sera vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Exemple 3. Montrer que le système de fonctions $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, où $\beta \neq 0$, est linéairement indépendant sur l'intervalle $-\infty < x < +\infty$.

Solution. Déterminons les valeurs de α_1 et α_2 qui vérifient l'identité

$$\alpha_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + \alpha_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \equiv 0. \tag{4}$$

Divisons le tout par $e^{\alpha x} \neq 0$:

$$\alpha_1 \sin \beta x + \alpha_2 \cos \beta x \equiv 0. \tag{5}$$

En portant dans (5) la valeur de $x = 0$, on obtient $\alpha_2 = 0$ et donc, $\sin \beta x \equiv 0$; mais la fonction $\sin \beta x$ n'est pas identiquement nulle si bien que $\alpha_1 = 0$. L'identité (5) et donc l'identité (4) n'ont lieu que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ce qui veut dire que les fonctions données sont linéairement indépendantes dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$.

Remarque. En passant, nous avons démontré l'indépendance linéaire des fonctions trigonométriques $\sin \beta x$, $\cos \beta x$.

Exemple 4. Démontrer que les fonctions

$$\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \tag{6}$$

sont linéairement dépendantes dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Solution. Montrons qu'il existe des nombres α_1, α_2, α_3 non tous nuls et tels que dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$ on ait l'indentité

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv 0. \tag{7}$$

Supposons vérifiée l'identité (7); posons, par exemple, $x = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$. Alors, on obtient un système homogène de trois équations à trois inconnues α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_2 \sin \frac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin \frac{\pi}{8} = 0, \\ \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin \frac{3\pi}{8} + \alpha_3 \sin \frac{\pi}{8} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin \frac{5\pi}{8} + \alpha_3 \sin \frac{3\pi}{8} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin \frac{\pi}{8} & -\sin \frac{\pi}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin \frac{3\pi}{8} & \sin \frac{\pi}{8} \\ 1 & \sin \frac{5\pi}{8} & \sin \frac{3\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite, le système homogène (8) possède des solutions non nulles, c'est-à-dire qu'il existe des nombres α_1, α_2, α_3 dont l'un au moins est non nul. Pour trouver un tel triplet de nombre α_1, α_2, α_3, pre-

nons, par exemple, les deux premières équations du système (8):

$$\alpha_2 \sin\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin\frac{3}{8}\pi + \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0.$$

De la première équation on tire $\alpha_2 = \alpha_3$, de la deuxième $\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}\alpha_3$. En posant $\alpha_3 = 1$, on obtient une solution non nulle du système (8):

$$\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1.$$

Montrons maintenant que pour ces valeurs de α_1, α_2, α_3 l'identité (7) sera vérifiée pour tout $x \in (-\infty, +\infty)$ *). On a

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv$$

$$\equiv -2\cos\frac{\pi}{8}\sin x + 2\sin x\cos\frac{\pi}{8} \equiv 0,$$

quel que soit x. Par conséquent, le système de fonctions (6) est linéairement dépendant sur l'intervalle $-\infty < x < +\infty$.

Remarque. Pour le cas de deux fonctions on peut indiquer un critère plus simple d'indépendance linéaire. A savoir, des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ seront linéairement indépendantes sur un intervalle (a, b) si leur rapport n'est pas identiquement égal à une constante $\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}\right)$ sur cet intervale; si $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{const}$, les fonctions seront linéairement dépendantes.

Exemple 5. Les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{ctg} x$ sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$ car leur rapport $\operatorname{tg} x/\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x \not\equiv \text{const}$ dans cet intervalle.

Exemple 6. Les fonctions $\sin 2x$ et $\sin x \cos x$ sont linéairement dépendantes dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$ parce que leur rapport $\frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} \equiv \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} \equiv 2 = \text{const}$ dans cet intervalle (aux points de discontinuité de la fonction $\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}$ nous définissons ce rapport suivant la continuité).

---

*) La dépendance linéaire des fonctions $\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ peut être établie si l'on remarque que $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8}\sin x$, ou $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 2\cos\frac{\pi}{8}\sin x \equiv 0$.

Soient n fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ possédant des dérivées d'ordre $(n-1)$. Le déterminant

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

s'appelle *wronskien* de ces fonctions. En général, le wronskien est une fonction de x définie dans un certain intervalle.

Exemple 7. Trouver le wronskien des fonctions $y_1(x) = e^{k_1 x}$ $y_2(x) = e^{k_2 x}$, $y_3(x) = e^{k_3 x}$.

Solution. On a

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

Exemple 8. Trouver le wronskien des fonctions $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $y_3(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

Solution. On a

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x & -\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

puisque la première et la dernière lignes du déterminant sont proportionnelles.

Théorème. *Si un système de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ est linéairement dépendant sur un intervalle fermé $[a, b]$, son wronskien est identiquement nul sur cet intervalle.*

C'est ainsi, par exemple, que le système de fonctions $\sin x$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ est linéairement dépendant dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et le wronskien de ces fonctions est partout nul dans cet intervalle (v. exemples 4 et 8).

Ce théorème fournit la condition nécessaire de dépendance linéaire d'un système de fonctions. Sa réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que le wronskien peut s'annuler identiquement aussi dans le cas où les fonctions données forment un système linéairement indépendant sur un certain intervalle.

Exemple 9. Considérons deux fonctions

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Leurs graphiques sont représentés sur la fig. 25.

Ce système de fonctions est linéairement indépendant car l'identité $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ n'est vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

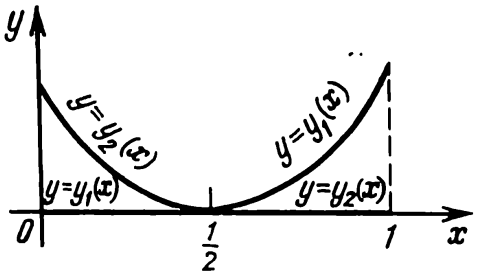

Fig. 25

En effet, si on le considère sur l'intervalle fermé $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient $\alpha_2 y_2(x) \equiv 0$, d'où $\alpha_2 = 0$ parce que $y_2(x) \not\equiv 0$; or, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a $\alpha_1 y_1(x) \equiv 0$, d'où $\alpha_1 = 0$ puisque $y_1(x) \not\equiv 0$ sur cet intervalle.

Cherchons le wronskien $W[y_1, y_2]$ de ce système. Dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 0 & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ 0 & 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, le wronskien $W[y_1, y_2] \equiv 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit donné un système de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$. Posons

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Le déterminant

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \ldots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \ldots & (y_2, y_n) \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \ldots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

s'appelle *déterminant de Gram* du système de fonctions $\{y_k(x)\}$.

Théorème. *Pour qu'un système de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ soit linéairement dépendant, il faut et il suffit que son déterminant de Gram soit nul.*

Exemple 10. Montrer que les fonctions $y_1 = x$, $y_2 = 2x$ sont linéairement dépendantes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Solution. On a

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}; \quad (y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3};$$

$$(y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2\, dx = \frac{4}{3};$$

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

par conséquent, les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement dé pendantes.

Etudier si les fonctions données sont linéairement indépendantes dans leur domaine de définition :

371. 4, x.

372. 1, 2, x, x^2.

373. x, $2x$, x^2.

374. e^x, xe^x, x^2e^x.

375. $\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$.

376. 1, $\sin x$, $\cos 2x$.

377. 5, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$.

378. $\cos x$, $\cos(x+1)$, $\cos(x-2)$.

379. 1, $\sin 2x$, $(\sin x - \cos x)^2$.

380. x, $a^{\lg_a x}$ $(x > 0)$.

381. $\lg_a x$, $\lg_a x^2$ $(x > 0)$.

382. 1, $\arcsin x$, $\arccos x$.

383. 5, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

384. 2π, $\operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi}$, $\operatorname{arcctg}\frac{x}{2\pi}$.

385. $e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $e^{-\frac{ax^2}{2}}\int\limits_0^x e^{\frac{at^2}{2}}\,dt$.

386. x, $x\int\limits_{x_0}^1 \frac{e^t}{t^2}\,dt\ (x_0>0)$.

387. Montrer que le système de fonctions

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_{n-1}(x),$$

définies sur l'intervalle $(a,\ b)$ est linéairement dépendant sur $(a,\ b)$.

388. Montrer que si le système de fonctions

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

est linéairement indépendant sur l'intervalle $(a,\ b)$, alors tout sous-système de ce système de fonctions est aussi linéairement indépendant sur $(a,\ b)$.

Dans les problèmes qui suivent trouver le wronskien des systèmes de fonctions indiquées:

389. 1, x.

390. x, $\frac{1}{x}$.

391. 1, 2, x^2.

392. e^{-x}, xe^{-x}.

393. e^x, $2e^x$, e^{-x}.

394. 2, $\cos x$, $\cos 2x$.

395. $\sin x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

396. $\arccos\frac{x}{\pi}$, $\arcsin\frac{x}{\pi}$.

397. π, $\arcsin x$, $\arccos x$.

398. 4, $\sin^2 x$, $\cos 2x$.

399. x, $\ln x$.

400. $\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$.

401. $e^x\sin x$, $e^x\cos x$.

402. $e^{-3x}\sin 2x$, $e^{-3x}\cos 2x$.

403. $\cos x$, $\sin x$.

404. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Dans les problèmes qui suivent, montrer que les fonctions données sont linéairement indépendantes et que leur wronskien est identiquement nul, construire les graphiques de ces fonctions:

405. $y_1(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0;\\ 0, & \text{si } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

$y_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0;\\ x^2, & \text{si } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

406. $y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ (x-2)^2, & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

407. $y_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ x^2, & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

408. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x\,|\,x\,|$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

409. En se servant du déterminant de Gram, montrer que les systèmes de fonctions indiqués dans les problèmes **373**, **377** et **379** sont linéairement dépendants sur $[-\pi, \pi]$.

2o. Equations linéaires homogènes à coefficients constants. Considérons l'équation différentielle

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{9}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles.

Pour trouver la solution générale de l'équation (9) procédons comme suit.

1) Ecrivons l'équation caractéristique de l'équation (9)

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{10}$$

2) Cherchons les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation caractéristique (10).

3) D'après la nature des racines de l'équation caractéristique (10), écrivons des solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9) en tenant compte du fait que :

a) à chaque racine réelle simple λ de l'équation caractéristique (10) correspond une solution particulière $e^{\lambda x}$ de l'équation différentielle (9) ;

b) à chaque couple de racines conjuguées simples $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ de l'équation caractéristique (10) correspondent deux solutions particulières linéairement indépendantes $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ de l'équation différentielle (10) ;

c) à chaque racine réelle λ de multiplicité s de l'équation caractéristique (10) correspondent s solutions particulières linéairement indépendantes $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2 e^{\lambda x}$, ..., $x^{s-1} e^{\lambda x}$ de l'équation différentielle (9) ;

d) à chaque couple de racines conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ de multiplicité s correspondent $2s$ solutions particulières

linéairement indépendantes de l'équation caractéristique (9)

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Le nombre de solutions particulières ainsi construites de l'équation différentielle (9) est égal à l'ordre de cette équation.

Toutes les solutions construites sont linéairement indépendantes et forment le système fondamental de solutions de l'équation différentielle (9).

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Cherchons ses racines: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Puisqu'elles sont réelles et distinctes, la solution générale est de la forme

$$y_{\text{g.h}} = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Solution. L'équation caractéristique est de la forme

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Les racines sont réelles et l'une d'elles à savoir $\lambda = -1$ est double de sorte que la solution générale est de la forme

$$y_{\text{g.h}} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3.$$

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

Solution. Son équation caractéristique

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

possède les racines $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = -2 + 3i$. La solution générale est

$$y_{\text{g.h}} = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x.$$

Exemple 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$y^{\text{V}} - 2y^{\text{IV}} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Solution. Son équation caractéristique

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

ou

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

a une racine simple $\lambda = 2$ et deux racines imaginaires doubles $\lambda = \pm i$. La solution générale est

$$y_{\text{g.h}} = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x.$$

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$y^{\text{IV}} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Elle possède des racines complexes doubles $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i$ et donc la solution générale aura la forme

$$y_{\text{g.h}} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x,$$

ou

$$y_{\text{g.h}} = e^{-x} (C_1 + C_3 x) \cos x + e^{-x} (C_2 + C_4 x) \sin x.$$

Etablir les équations différentielles linéaires homogènes connaissant leurs équations caractéristiques:

410. $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$.

411. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.

412. $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$.

413. $\lambda (\lambda + 1) (\lambda + 2) = 0$.

414. $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$.

415. $\lambda^3 = 0$.

Etablir les équations différentielles linéaires homogènes connaissant les racines des équations caractéristiques et écrire leurs solutions générales:

416. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

417. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$.

418. $\lambda_1 = 3 - 2i$, $\lambda_2 = 3 + 2i$.

419. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Composer les équations différentielles linéaires homogènes connaissant les systèmes fondamentaux de solutions:

420. e^{-x}, e^x.

421. 1, e^x.

422. e^{-2x}, xe^{-2x}.

423. $\sin 3x$, $\cos 3x$.

424. 1, x.

425. e^x, e^{2x}, e^{3x}.

426. e^x, xe^x, $x^2 e^x$.

427. e^x, xe^x, e^{2x}.

428. 1, x, e^x.

429. 1, $\sin x$, $\cos x$.

430. e^{2x}, $\sin x$, $\cos x$.

431. 1, $e^{-x}\sin x$, $e^{-x} \cos x$.

Intégrer les équations suivantes et résoudre le problème de Cauchy là où il est indiqué:

432. $y'' - y = 0$.

433. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

434. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$
435. $y'' + 2y' + y = 0.$
436. $y'' - 4y' + 3y = 0,$
$y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$
437. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$
438. $y'' - 2y' - 2y = 0.$
439. $y^{VI} + 2y^{V} + {}^{IV}y = 0.$
440. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$
441. $y''' - 8y = 0.$
442. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$
443. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
444. $y'' - 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
445. $y^{IV} + 2y''' + 4y''' - 2y' - 5y = 0.$
446. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0.$
447. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$
448. $y''' - 2y'' + 2y' = 0.$
449. $y^{IV} - y = 0.$
450. $y^{x} = 0.$
451. $y''' - 3y' - 2y = 0.$
452. $2y''' - 3y'' + y' = 0.$
453. $y''' + y'' = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

3°. Equations linéaires non homogènes à coefficients constants. A. *Méthode des coefficients indéterminés* (méthode de sélection). Soit donnée une équation différentielle

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{11}$$

à coefficients réels constants $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Théorème. *La solution générale de l'équation non homogène* (11) *est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et de l'une quelconque des solutions particulières de l'équation non homogène.*

La recherche de la solution générale de l'équation homogène associée s'obtient en appliquant les règles exposées plus haut au n° 2. Ainsi, le problème d'intégration de l'équation (11) se ramène à la recherche de la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation non homogène. Dans le cas général, l'intégration de l'équation (11) peut être réalisée par la méthode de variation des constantes arbitraires (v. plus loin, n° 5). Pour les seconds membres *de forme spéciale*, la solution particulière peut être obtenue plus simplement par la

méthode des coefficients indéterminés. La forme générale du second membre $f(x)$ de l'équation (11) pour laquelle on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés est la suivante

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

où $P_l(x)$ et $Q_m(x)$ sont des polynômes de degrés l et m respectivement. Dans ce cas, la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation (11) est cherchée sous la forme

$$y_{p.n} = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x],$$

où $k = \max(m, l)$, $\tilde{P}_k(x)$ et $\tilde{Q}_k(x)$ sont des polynômes en x de degré k de la forme générale à coefficients indéterminés, alors que s est la multiplicité de la racine $\lambda = \alpha + i\beta$ de l'équation caractéristique (si $\alpha \pm i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $s = 0$).

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ possède des racines distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène associée $y_{g.h}$ sera

$$y_{g.h} = C_1 e^x + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Puisque le nombre zéro n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation donnée doit être cherchée sous la forme (v. tableau 1, cas I (1)):

$$y_{p.n} = A_1x^2 + A_2x + A_3,$$

où A_1, A_2, A_3 sont des coefficients, pour le moment inconnus, qu'on doit déterminer. En introduisant l'expression de $y_{p.n}$ dans l'équation donnée on obtient

$$-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x,$$

d'où

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$, de sorte qu'une solution particulière soit

$$y_{p.n} = -x^2 - 3x - 1$$

et la solution générale $y_{g.h}$ de l'équation donnée est de la forme

$$y_{g.h} = C_1 e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - x^2 - 3x - 1.$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Tableau 1

Tableau récapitulatif de formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres *

n°	Second membre de l'équation différentielle	Racine de l'équation caractéristique	Formes de la solution particulière
I	$P_m(x)$	1. Le nombre zéro n'est pas racine de l'équation différentielle	$\widetilde{P}_m(x)$
		2. Le nombre 0 est racine de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\,e^{\alpha x}$	1. Le nombre α n'est pas racine de l'équation caractéristique	$\widetilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
		2. Le nombre α est racine de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s\widetilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	1. Les nombres $\pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
		2. Les nombres $\pm i\beta$ sont racines de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	1. Les nombres $\alpha\pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique	$(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$
		2. Les nombres $\alpha\pm i\beta$ sont racines de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$

* Les trois premières formes des seconds membres sont des cas particuliers de la forme IV.

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^3-\lambda^2=0$ ayant comme racines $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, la solution générale de l'équation homogène associée sera

$$y_{\text{g. h}} = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Puisque le nombre 0 est une racine double de l'équation caractéristique, il convient de chercher une solution particulière sous la forme (v. tableau 1, cas I (2))

$$y_{\text{p. n}} = x^2 (A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

En introduisant l'expression de $y_{\text{p. n}}$ dans cette équation, on aura

$$-12A_1x^2 + (24A_1 - 6A_2)\, x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

d'où

$$\begin{cases} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système admet pour solution : $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$ et donc

$$y_{\text{p. n}} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$y_{\text{g. h}} = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation $y'' + y' = 4x^2e^x$.

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^2 + \lambda = 0$ ayant comme racines $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, la solution générale $y_{\text{g. h}}$ de l'équation homogène associée sera

$$y_{\text{g. h}} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Puisque $\alpha = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière $y_{\text{p. n}}$ de l'équation non homogène sera cherchée sous la forme (v. tableau 1, cas II (1))

$$y_{\text{p. n}} = (A_1x^2 + A_2x + A_3)\, e^x.$$

En l'introduisant dans l'équation initiale et en simplifiant par e^x les deux membres de l'équation, on aura

$$2A_1x^2 + (6A_1 + 2A_2)\, x + 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 4x^2.$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de x dans les premier et second membres des égalités, on obtient un système linéaire

d'équations pour déterminer les coefficients A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} 2A_1 = 4, \\ 6A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0, \end{cases}$$

dont la résolution donne $A_1 = 2$, $A_2 = -6$, $A_3 = 7$ si bien que

$$y_{\text{p. n}} = (2x^2 - 6x + 7)\, e^x.$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)\, e^x.$$

Exemple 4. Trouver la solution générale de l'équation $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$.

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ possède une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$, si bien que

$$y_{\text{g. h}} = (C_1 + C_2 x)\, e^{-5x}.$$

Puisque $\alpha = -5$ est racine de multiplicité $s = 2$ de l'équation caractéristique, la solution particulière $y_{\text{p. n}}$ de l'équation non homogène sera cherchée sous la forme (v. tableau 1, cas II (2))

$$y_{\text{p. n}} = Bx^2 e^{-5x}; \text{ alors}$$
$$y'_{\text{p. n}} = B(2x - 5x^2)\, e^{-5x},$$
$$y''_{\text{p. n}} = B(2 - 20x + 25x^2)\, e^{-5x}.$$

En introduisant les expressions de $y_{\text{p. n}}$, $y'_{\text{p. n}}$, $y''_{\text{p. n}}$ dans l'équation initiale, on obtient $2Be^{-5x} = 4e^{-5x}$, d'où $B = 2$ et donc $y_{\text{p. n}} = 2x^2 e^{-5x}$. La solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}.$$

Exemple 5. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x.$$

Solution. *Premier procédé.* L'équation caractéristique $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ayant comme racines $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, on a

$$y_{\text{g. h}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Puisque le nombre i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera la solution particulière $y_{\text{p. n}}$ de l'équation non homogène sous la forme (v. tableau 1, cas III (1)):

$$y_{\text{p. n}} = (A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \sin x;$$

alors

$$y'_{\text{p. n}} = (A_1 + B_2 + B_1 x) \cos x + (B_1 - A_2 - A_1 x) \sin x,$$
$$y''_{\text{p. n}} = (2B_1 - A_2 - A_1 x) \cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x) \sin x.$$

En introduisant ces expressions dans l'équation initiale, on aura

$$(2B_1 - A_2 - A_1x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1x)\sin x +$$
$$+ 3(A_1 + B_2 + B_1x)\cos x + 3(B_1 - A_2 - A_1x)\sin x +$$
$$+ 2(A_1x + A_2)\cos x + 2(B_1x + B_2)\sin x = x\sin x,$$

or

$$[(A_1 + 3B_1)x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2]\cos x +$$
$$+ [(-3A_1 + B_1)x - 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2]\sin x = x\sin x.$$

On en déduit un système d'équations linéaires en A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} A_1 + 3B_1 = 0, \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0, \\ -3A_1 + B_1 = 1, \\ -2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $A_1 = -3/10$, $A_2 = 17/50$, $B_1 = 1/10$, $B_2 = 3/25$ et une solution particulière $y_{\text{p.n}}$ s'écrira sous la forme

$$y_{\text{p.n}} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x +$$
$$+ \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x. \blacklozenge$$

Dans le cas où le second membre $f(x)$ contient des fonctions trigonométriques $\sin \beta x$ et $\cos \beta x$, il s'avère plus commode d'utiliser le passage aux fonctions exponentielles. Illustrons ce procédé sur un exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = x\cos x.$$

Ici, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ et la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y_{\text{g.h}} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Une solution particulière de l'équation non homogène $y_{\text{p.n}}$ devra être cherchée sous la forme

$$y_{\text{p.n}} = x[(A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x].$$

Procédons comme suit. Considérons l'équation

$$z'' + z = xe^{ix}. \tag{12}$$

On conçoit aisément que le second membre de l'équation initiale représente la partie réelle du second membre de l'équation (12):

$$x \cos x = \operatorname{Re}(xe^{ix}).$$

Théorème. *Si une équation différentielle à coefficients réels* $L[y] = f_1(x) + if_2(x)$ *a une solution* $y = u(x) + iv(x)$, *alors* $u(x)$ *est solution de l'équation* $L[y] = f_1(x)$ *et* $v(x)$ *est solution de l'équation* $L[y] = f_2(x)$.

Cherchons $z_{\text{p. n}}$ de l'équation (12):

$$z_{\text{p. n}} = (Ax + B)\, xe^{ix} = (Ax^2 + Bx)\, e^{ix},$$

$$z''_{\text{p. n}} = 2Ae^{ix} + 2(2Ax + B)\, ie^{ix} - (Ax^2 + Bx)\, e^{ix}.$$

En introduisant dans l'équation (12) et en simplifiant les deux membres par e^{ix}, on aura

$$2A + 4Axi + 2Bi = x,$$

d'où $4Ai = 1$, $A = -i/4$, $A + Bi = 0$, $B = -A/i = 1/4$; si bien que

$$z_{\text{p. n}} = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right) e^{ix} = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \frac{x \cos x + x^2 \sin x}{4} + i\,\frac{x \sin x - x^2 \cos x}{4}.$$

D'où, en vertu du théorème

$$y_{\text{p. n}} = \operatorname{Re} z_{\text{p. n}} = \frac{x \cos x + x^2 \sin x}{4}.$$

Ce procédé permet parfois de simplifier et de réduire les calculs liés à la recherche des solutions particulières.

Deuxième procédé. Résolvons cet exemple par le passage aux fonctions exponentielles. Considérons l'équation

$$z'' + 3z' + 2z = xe^{ix}. \tag{13}$$

Il est facile de voir que le second membre de l'équation initiale est égal à la partie imaginaire de xe^{ix}:

$$x \sin x = \operatorname{Im}(xe^{ix}).$$

Cherchons la solution $z_{\text{p. n}}$ de l'équation (13) sous la forme

$$z_{\text{p. n}} = (Ax + B)\, e^{ix},$$

alors

$$z'_{\text{p. n}} = Ae^{ix} + i(Ax + B)\, e^{ix}, \quad z''_{\text{p. n}} = 2iAe^{ix} - (Ax + B)\, e^{ix}.$$

En introduisant ces expressions dans (13) et en simplifiant par e^{ix}, on obtient

$$2Ai - Ax - B + 3A + 3Aix + 3Bi + 2Ax + 2B = x,$$

d'où

$$\begin{cases} A+3Ai=1, \\ 2Ai+B+3A+3Bi=0; \end{cases}$$

si bien que

$$A=\frac{1}{1+3i}=\frac{1}{10}-\frac{3i}{10}, \quad B=-\frac{A(3+2i)}{1+3i}=\frac{6}{50}+\frac{17}{50}i.$$

Ainsi,

$$z_{\text{p. n}}=\left(\frac{1-3i}{10}x+\frac{6+17i}{50}\right)e^{ix}=\left(\frac{5x+6}{50}+\frac{17-15x}{50}i\right)(\cos x+i\sin x)=$$

$$=\frac{(5x+6)\cos x+(15x-17)\sin x}{50}+i\frac{(5x+6)\sin x+(17-15x)\cos x}{50};$$

d'où

$$y_{\text{p. n}}=\operatorname{Im} z_{\text{p. n}}=\frac{5x+6}{50}\sin x+\frac{17-15x}{50}\cos x,$$

ce qui coïncide avec la solution $y_{\text{p. n}}$ trouvée plus haut.

Exemple 6. Trouver la solution générale de l'équation $y''+4y=$ $=\sin 2x$.

Solution. Considérons l'équation $z''+4z=e^{i2x}$. On a

$$\sin 2x=\operatorname{Im} e^{2ix}, \text{ et donc } y_{\text{p. n}}=\operatorname{Im} z_{\text{p. n}}.$$

L'équation caractéristique $\lambda^2+4=0$ possède des racines simples $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. Par conséquent, on cherchera une solution particulière sous la forme (v. tableau 1, cas III (2)):

$$z_{\text{p. n}}=Ax\,e^{2ix},$$

alors

$$z''_{\text{p. n}}=-4Ax\,e^{2ix}+4Ai\,e^{2ix}.$$

En introduisant les expressions de $z_{\text{p. n}}$ et $z''_{\text{p. n}}$ dans l'équation et en simplifiant par e^{2ix}, on obtient $4Ai=1$, d'où $A=-i/4$ et donc

$$z_{\text{p. n}}=-\frac{1}{4}ixe^{2ix}=\frac{1}{4}x\sin 2x-i\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Une solution particulière de l'équation non homogène donnée sera

$$y_{\text{p. n}}=\operatorname{Im} z_{\text{p. n}}=-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Exemple 7. Trouver la solution générale de l'équation $y''-6y'+$ $+9y=25e^x\sin x$.

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^2-6\lambda+9=0$ ayant comme racines $\lambda_1=\lambda_2=3$, la solution générale $y_{\text{g. h}}$ de l'équation homogène sera

$$y_{\text{g. h}}=(C_1+C_2x)\,e^{3x}.$$

Les nombres $1 \pm i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique si bien qu'on cherchera une solution particulière $y_{p.n}$ sous la forme (v. tableau 1, cas IV (1))

$$y_{p.n} = e^x (a \cos x + b \sin x).$$

En introduisant l'expression de $y_{p.n}$ dans l'équation et en simplifiant les deux membres par e^x, on obtient

$$(3a - 4b) \cos x + (4a + 3b) \sin x = 25 \sin x.$$

D'où on tire le système

$$3a - 4b = 0, \quad 4a + 3b = 25,$$

dont la solution est $a = 4$, $b = 3$ et par suite

$$y_{p.n} = e^x (4 \cos x + 3 \sin x).$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + e^x (4 \cos x + 3 \sin x).$$

Exemple 8. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x.$$

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ayant comme racines $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, on a

$$y_{g.h} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x}.$$

Le nombre $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ étant une racine simple de l'équation caractéristique, une solution $y_{p.n}$ devra être cherchée sous la forme (v. tableau 1, cas IV (2))

$$y_{p.n} = x (A \cos 2x + B \sin 2x) e^{-x},$$

alors

$$y'_{p.n} = e^{-x} [(A - Ax + 2Bx) \cos 2x + (B - Bx - 2Ax) \sin 2x],$$

$$y''_{p.n} = e^{-x} [(-2A - 3Ax + 4B - 4Bx) \cos 2x + (-2B - 3Bx - 4A + 4Ax) \sin 2x].$$

En introduisant les expressions obtenues pour $y_{p.n}$ et ses dérivées dans l'équation initiale et en simplifiant par e^{-x}, on aura

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x,$$

d'où $A = 0$, $B = 1/4$ et donc

$$y_{p.n} = 1/4 x e^{-x} \sin 2x.$$

La solution générale de l'équation donnée sera

$$y(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x} + 1/4 x e^{-x} \sin 2x.$$

Déterminer la forme de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène, connaissant les racines de son équation caractéristique et son second membre $f(x)$:

454. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

455. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

456. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

457. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

458. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

459. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

460. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

461. $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

462. $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i;\ f(x) = A \sin 2x + B \cos 2x.$

463. $\lambda_1 = -ki,\ \lambda_2 = ki;\ f(x) = A \sin kx + B \cos kx.$

464. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(A \sin x + B \cos x).$

465. $\lambda_1 = -1 - i,\ \lambda_2 = -1 + i;\ f(x) = e^{-x}(A \sin x + B \cos x).$

466. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

467. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

468. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

469. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

470. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

471. $\left.\begin{array}{l} \text{a) } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1, \\ \text{b) } \lambda_1 = k,\ \lambda_2 = 1, \\ \text{c) } \lambda_1 = \lambda_2 = k, \\ \text{d) } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1, \\ \text{e) } \lambda_1 = \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 1, \\ \text{f) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}, \\ k \neq 0,\ k \neq 1. \end{array}$

472. $\left.\begin{array}{l} \text{a) } \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \\ \text{b) } \lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} f(x) = a \sin x + b \cos x.$

473. $\left.\begin{array}{l} \text{a) } \lambda_1 = 3 - 2i,\ \lambda_2 = 3 + 2i, \\ \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \\ \text{b) } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i, \\ \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i \end{array}\right\} f(x) = e^{3x}(\sin 2x + \cos 2x).$

Pour les équations différentielles linéaires non homogènes suivantes, déterminer la forme de la solution particulière:

474. $y'' + 3y' = 3.$

475. $y'' - 7y' = (x - 1)^2.$

476. $y'' + 3y' = e^x.$

477. $y'' + 7y' = e^{-7x}$.
478. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)\, e^{4x}$.
479. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.
480. $4y'' - 3y' = xe^{\frac{3}{4}x}$.
481. $y'' - 4y' = xe^{4x}$.
482. $y'' + 25y = \cos 5x$.
483. $y'' + y = \sin x - \cos x$.
484. $y'' + 16y = \sin (4x + \alpha)$.
485. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x)$.
486. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} (\sin 2x - \cos 2x)$.
487. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$.
488. $y'' + k^2y = k \sin (kx + \alpha)$.
489. $y'' + k^2y = k$.
490. $y''' + y = x$.
491. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1$.
492. $y''' + y' = 2$.
493. $y''' + y'' = 3$.
494. $y^{IV} - y = 1$.
495. $y^{IV} - y' = 2$.
496. $y^{IV} - y'' = 3$.
497. $y^{IV} - y''' = 4$.
498. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 1$.
499. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{4x}$.
500. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{-x}$.
501. $y^{IV} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$.
502. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \sin 2x$.
503. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \cos x$.
504. $y^{IV} + 4y'' + 4y = x \sin 2x$.
505. $y^{IV} + 2n^2y'' + n^4y = a \sin (nx + \alpha)$.
506. $y^{IV} - 2n^2y'' + n^4y = \cos (nx + \alpha)$.
507. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \sin x$.
508. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$.
509. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = xe^x$.

Résoudre les équations linéaires non homogènes suivantes:

510. $y'' + 2y' + y = -2$.
511. $y'' + 2y' + 2 = 0$.
512. $y'' + 9y - 9 = 0$.
513. $y''' + y'' = 1$.
514. $5y''' - 7y'' - 3 = 0$.
515. $y^{IV} - 6y''' + 6 = 0$.
516. $3y^{IV} + y''' = 2$.
517. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$.
518. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.
519. $y'' + 8y' = 8x$.
520. $y'' - 2ky' + k^2y = e^x$, $(k \neq 1)$.

521. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.
522. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.
523. $7y'' - y' = 14x$.
524. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.
525. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.
526. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.
527. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$.
528. $y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x$.
529. $y'' + y = 4x \cos x$.
530. $y'' - 2my' + m^2y = \sin nx$.
531. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$.
532. $y'' + a^2y = 2 \cos mx + 3 \sin mx \quad (m \neq a)$.
533. $y'' - y' = e^x \sin x$.
534. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$.
535. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x$.
536. $4y'' + 8y' = x \sin x$.
537. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.
538. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$.
539. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.
540. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.
541. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.
542. $y'' - 2y' + y = x^3$.
543. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.
544. $y'' + y = x^2 \sin x$.
545. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$.
546. $y''' - y = \sin x$.
547. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$.
548. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$.
549. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$.

B. *Principe de superposition.* Parfois, pour chercher des solutions particulières des équations linéaires non homogènes il est commode de se servir du théorème suivant:

Théorème (principe de superposition). *Si* $y_k(x)$ *est solution de l'équation*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f_k(x),$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

alors la fonction $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ *est solution de l'équation*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Exemple 9. Résoudre l'équation

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}. \tag{14}$$

Solution. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ ayant comme racines $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, la solution générale $y_{g.h}$ de l'équation homogène associée sera

$$y_{g.h} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Pour trouver une solution particulière $y_{g.n}$ de l'équation (14) cherchons des solutions particulières de deux équations

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x, \tag{15}$$

$$y'' - 6y' + 9y = -16e^{3x}. \tag{16}$$

L'équation (15) a une solution particulière y_1 de la forme $y_1 = Ae^x$ (v. tableau 1, cas II (1)). En introduisant l'expression de y_1 dans l'équation (15), on trouve $A = 1$, si bien que $y_1 = e^x$. Cherchons une solution particulière de l'équation (16) sous la forme $y_2 = Bx^2e^{3x}$ (v. tableau 1, cas II (2)). On trouve $y_2 = -8x^2e^{3x}$.

En vertu du principe de superposition, la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation donnée sera égale à la somme des solutions y_1 et y_2 des équations (15) et (16):

$$y_{p.n} = y_1 + y_2 = e^x - 8x^2e^{3x}.$$

La solution générale de l'équation (14) est

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x} + e^x - 8x^2e^{3x}.$$

Exemple 10. Résoudre l'équation

$$y''' - 2y'' + 2y' = 4\cos x \cos 3x + 6 \sin^2 x. \tag{17}$$

Solution. En utilisant les identités trigonométriques connues, ramenons le second membre de l'équation (17) à la forme canonique

$$4\cos x \cos 3x + 6\sin^2 x = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

L'équation initiale (17) s'écrira

$$y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x - \cos 2x + 3. \tag{18}$$

La solution générale de l'équation homogène $y''' - 2y'' + 2y' = 0$ sera

$$y_{g.h} = C_1 + (C_2 \cos x + C_3 \sin x)\, e^x.$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation (18), utilisons le principe de superposition. A cet effet, cherchons des solutions particulières de trois équations

$$y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x, \tag{19}$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = -\cos 2x, \tag{20}$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = 3. \tag{21}$$

En se servant de la méthode des coefficients indéterminés, on trouve des solutions particulières y_1, y_2 et y_3 des équations (19), (20) et (21) respectivement

$$y_1 = \frac{1}{65}\left(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right), \quad y_3 = \frac{3}{2}x.$$

D'après le principe de superposition, une solution particulière de l'équation non homogène (8) sera

$$y_{\text{p. n}} = \frac{1}{65}\left(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x\right) + \frac{3}{2}x.$$

La solution générale de l'équation initiale sera

$$y = C_1 + (C_2\cos x + C_3\sin x)\,e^x + \frac{1}{65}\left(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x\right) +$$
$$+ \frac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x\right) + \frac{3}{2}x.$$

Déterminer la forme de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène, connaissant les racines de son équation caractéristique et le second membre $f(x)$:

550. $\left.\begin{array}{ll} \text{a) } \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, & \lambda_3 = 2, \\ \text{b) } \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, & \lambda_3 = 3, \\ \text{c) } \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 1, & \\ \text{d) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, & \end{array}\right\} f(x) = ae^{-x} + be^x.$

En utilisant le principe de superposition, déterminer la forme de la solution particulière des équations différentielles linéaires non homogènes suivantes:

551. $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$.

552. $y'' + 4y' = x + e^{-4x}$.

553. $y'' - y = x + \sin x$.

554. $y'' - 2y' + 2y = (1 + \sin x)\,e^x$.

555. $y''' - y'' = 1 + e^x$.

556. $y''' + 4y' = e^{2x} + \sin 2x$.

557. $y'' + 4y = \sin x \sin 2x$.
558. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

Résoudre les équations linéaires non homogènes, en utilisant le principe de superposition pour la recherche de leurs solutions particulières :

559. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.
560. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$.
561. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$.
562. $y'' + 2y' + 2y = (5x + 4)\, e^x + e^{-x}$.
563. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.
564. $2y'' - 3y' - 2y = 5e^x \operatorname{ch} x$.
565. $y'' + 4y = x \sin^2 x$.
566. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$.
567. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$.
568. $y^V + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.
569. $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$.
570. $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.
571. $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$.
572. $y'' + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.
573. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$.
574. $y'' + y = \cos^2 2x + \sin^2 \frac{x}{2}$.
575. $y'' - 4y' + 5y = 1 + 8\cos x + e^{2x}$.
576. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 \frac{x}{2}$.
577. $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x$.
578. $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1$.
579. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin x + \sin 2x$.
580. $y'' + 2y' + y = 1 + 2\cos x + \cos 2x - \sin 2x$.
581. $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$.
582. $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3x} + 8\sin x + 6\cos x$.
583. $y'' + 2y' + 1 = 3\sin 2x + \cos x$.
584. $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$.
585. $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.
586. $y''' - y'' - 2y' = 4x + 3\sin x + \cos x$.
587. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$.
588. $y^V - y^{IV} = xe^x - 1$.
589. $y^V + y''' = x + 2e^{-x}$.

C. *Problème de Cauchy.* On sait que pour une équation linéaire non homogène

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x)$$

le problème de Cauchy consiste à trouver une solution de cette équation qui satisfait aux conditions initiales (conditions de Cauchy)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Exemple 11. Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - y = 4e^x \tag{22}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{23}$$

Solution. Cherchons la solution générale de l'équation (22)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2xe^x. \tag{24}$$

Pour résoudre le problème initial posé (22)-(23) (problème de Cauchy), il faut déterminer les valeurs des constantes C_1 et C_2 de manière que la solution (24) satisfasse aux conditions initiales (23). En utilisant la condition $y(0) = 0$, on obtient $C_1 + C_2 = 0$. Dérivons (24), il vient

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2e^x + 2xe^x,$$

d'où, d'après la condition $y'(0) = 1$ on aura $C_1 - C_2 = -1$. Pour déterminer C_1, C_2 nous avons obtenu le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = -1 \end{cases}$$

dont la résolution donne $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$. En portant les valeurs trouvées des constantes arbitraires dans la solution générale (24), on obtient la solution du problème initial (22)-(23):

$$y = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} + 2xe^x \quad \text{ou}$$

$$y = 2xe^x - \operatorname{sh} x.$$

Exemple 12. Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = 8\cos x, \tag{25}$$

qui est bornée lorsque $x \to -\infty$.

Solution. La solution générale de cette équation est

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2(\cos x + \sin x). \tag{26}$$

Lorsque $x \to -\infty$ la grandeur $e^{-2x} \to +\infty$ quelles que soient C_1 et C_2 non simultanément nulles, le premier termi au second membre de la relation (26) sera une fonction non bornée pour $x \to -\infty$, alors

que le deuxième terme sera une fonction bornée pour toutes les valeurs de x. Par conséquent, c'est seulement pour $C_1 = C_2 = 0$ qu'on a une solution de l'équation (25) non bornée pour $x \to -\infty$, à savoir

$$y = 2(\cos x + \sin x). \tag{27}$$

De plus, la solution (27) de l'équation (25) est bornée pour tous les x:

$$|y| = |2(\cos x + \sin x)| \leqslant 2(|\cos x| + |\sin x|) < 4$$

pour tous les $x \in (-\infty, +\infty)$.

Exemple 13. Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x}\cos x, \tag{28}$$

qui satisfait à la condition $y \to 2$ pour $x \to +\infty$.

Solution. La solution générale de cette équation est

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x). \tag{29}$$

Quelles que soient les valeurs des constantes C_1 et C_2 simultanément non nulles, la solution (29) est une fonction non bornée pour $x \to +\infty$. Pour $C_1 = C_2 = 0$ la solution de l'équation (28) sera la fonction $y = 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$ qui vérifie évidemment la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$. Ainsi,

$$y = 2 + (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$$

sera une solution particulière cherchée.

Dans les problèmes qui suivent, trouver des solutions particulières des équations satisfaisant aux conditions initiales données:

590. $y'' + y = 2(1 - x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

591. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

592. $y'' + 9y = 36e^{3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

593. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

594. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

595. $y'' + y' = e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

596. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

597. $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

598. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$.

599. $y'' + y = 4x\cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

600. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

601. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$; $y(0) = y'(0) = 1$.

602. $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$; $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.

603. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

604. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

605. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

606. $y''' - y = 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

607. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

Dans les problèmes qui suivent trouver des solutions particulières des équations qui satisfont aux conditions données à l'infini :

608. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$, y est borné pour $x \to +\infty$.

609. $y'' + 2y' + 5y = 4\cos 2x + \sin 2x$, y est borné pour $x \to -\infty$.

610. $y'' - y' = 1$, y est borné pour $x \to \infty$.

611. $y'' - y = -2\cos x$, y est borné pour $x \to \infty$.

612. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$, $y \to 0$ pour $x \to +\infty$.

613. $y'' + 4y' + 3y = 8e^x + 9$, $y \to 3$ pour $x \to -\infty$.

614. $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -\frac{1}{5}$ pour $x \to \infty$.

615. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x(\sin x + 7\cos x)$, $y \to 0$ pour $x \to -\infty$.

616. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2x}(9\sin 2x + 4\cos 2x)$, $y \to 0$ pour $x \to +\infty$.

617. $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$, $y \to 0$ pour $x \to +\infty$.

4°. **Equations d'Euler.** On désigne ainsi les équations linéaires de la forme

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0, \tag{30}$$

où tous les a_i sont des constantes. Par le changement de variable $x = e^t$ ces équations se ramènent à des équations linéaires homogènes à coefficients constants :

$$b_0y_t^{(n)} + b_1y_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}y_t' + b_ny(t) = 0. \tag{31}$$

Remarque 1. Les équations de la forme

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \\ + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = 0$$

s'appellent elles aussi *équations d'Euler* et se ramènent à des équations linéaires homogènes à coefficients constants au moyen du changement de variables $ax + b = e^t$.

Remarque 2. Des solutions particulières de l'équation (30) peuvent être cherchées tout de suite sous la forme $y = x^k$. Dans ce cas, on obtient pour k une équation qui coïncide avec l'équation caractéristique de l'équation (31).

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation d'Euler $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

Solution. *Premier procédé.* Effectuons le changement de variable $x = e^t$, il vient

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-t}}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

L'équation caractéristique ayant comme racines $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, la solution générale de la dernière équation sera $y = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$. Mais puisque $x = e^t$, on a $y = C_1x^{-3} + C_2x^2$ ou

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

Deuxième procédé. Cherchons la solution de l'équation donnée sous la forme $y = x^k$, où k est un nombre inconnu. On trouve $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. En portant dans l'équation on obtient

$$x^2k(k-1)x^{k-2} + 2x^kx^{k-1} - 6x^k = 0,$$

ou

$$x^k[k(k-1) + 2k - 6] = 0.$$

Mais puisque $x^k \not\equiv 0$, on a $k(k-1) + 2k - 6 = 0$ ou $k^2 + k - 6 = 0$. Les racines de cette équation sont $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. A ces racines correspond le système fondamental de solutions $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^2$ et la solution générale sera comme dans le premier procédé

$$y = C_1x^{-3} + C_2x^2. \blacklozenge$$

Les équations d'Euler non homogènes de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^ky^{(k)} = x^\alpha P_m(\ln x),$$

où $P_m(u)$ est un polynôme de degré m peuvent être également résolues par la méthode des coefficients indéterminés par analogie avec la résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constants et avec second membre de la forme $e^{\alpha x}P_m(x)$.

Exemple 2. Résoudre l'équation d'Euler $x^2y'' - xy' + 2y = \sin x$.

Solution. L'équation caractéristique $k(k-1) - k + 2 = 0$ ou $k^2 - 2k + 2 = 0$ possède les racines $k_1 = 1 - i$, $k_2 = 1 + i$. La solution générale de l'équation homogène associée sera donc

$$y_{\text{g. h}} = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x).$$

Une solution particulière sera cherchée sous la forme $y_p = x(A \ln x + B)$; on a

$$y_p' = A \ln x + B + A, \quad y_p'' = A/x.$$

Portant dans l'équation donnée, on obtient

$$Ax - x(A \ln x + A + B) + 2x(A \ln x + B) = x \ln x,$$

ou

$$Ax \ln x + Bx = x \ln x,$$

d'où $A = 1$, $B = 0$, Ainsi $y_p = x \ln x$.
La solution générale sera

$$y = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x) + x \ln x.$$

Intégrer les équations d'Euler homogènes suivantes:

618. $x^2y'' + xy' - y = 0$.
619. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
620. $x^2y'' + 2xy' + 6y = 0$.
621. $xy'' + y' = 0$.
622. $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$.
623. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.
624. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.
625. $x^2y''' = 2y'$.
626. $(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$.
627. $(2x+1)^2 y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$.

Résoudre les équations d'Euler non homogènes suivantes:

628. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$.
629. $x^2y'' - 2y = \sin \ln x$.
630. $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16 \ln x}{x}$.
631. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$.
632. $x^2y'' + xy' - y = x^m$, $|m| \neq 1$.
633. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$.
634. $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$.
635. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

5°. Équations différentielles linéaires à coefficients variables. Méthode de Lagrange. Dans le cas où l'on connaît une solution particulière $y_1(x)$ de l'équation

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0, \tag{32}$$

son ordre peut être abaissé d'une unité (l'équation restant linéaire) en posant $y = y_1 z$, où z est une nouvelle fonction inconnue et en effectuant ensuite le changement de variable $z' = u$ [on peut effectuer directement le changement $u = (y/y_1)'$].

Si l'on connaît k solutions linéairement indépendantes de l'équation (32), l'ordre de cette équation peut être abaissé de k unités.

La solution générale de l'équation

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x) \tag{33}$$

est la somme d'une solution particulière quelconque et de la solution générale de l'équation homogène associée (32).

Si l'on connaît le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée (32), la solution générale de l'équation non homogène (33) peut s'obtenir aussi par la méthode de variation des constantes (*méthode de Lagrange*).

La solution générale de l'équation (32) est de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

On cherchera la solution de l'équation (33) sous la forme

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n, \tag{34}$$

où $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ sont des fonctions inconnues pour l'instant. Pour les déterminer on obtient le système

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \ldots + y_n C_n' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + \ldots + y_n' C_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \ldots + y^{(n-1)} C_n' = f(x). \end{cases} \tag{35}$$

En résolvant ce système par rapport à $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

d'où

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + \tilde{C}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où $\tilde{C}_i$ sont des constantes arbitraires. En introduisant les valeurs trouvées de $C_i(x)$ dans (34), on obtient la solution générale de l'équation (33).

En particulier, pour une équation du second ordre

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x)$$

le système (35) est de la forme

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = f(x). \end{cases} \tag{36}$$

En résolvant (36) par rapport à C_1' et C_2', on obtient

$$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \qquad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]},$$

d'où on trouve

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx + \tilde{C}_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx + \tilde{C}_2,$$

où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont des constantes d'intégration.

Remarque. Pour l'équation $a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x)$, où $a_0(x) \not\equiv 1$, $a_0(x) \neq 0$, le système (36) s'écrira

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation $xy'' + 2y' + xy = 0$ si $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ est sa solution particulière.

Solution. Posons $y = \frac{\sin x}{x} \cdot z$ où z est une nouvelle fonction inconnue de x; alors

$$y' = y_1' z + y_1 z', \qquad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''.$$

Portant dans l'équation donnée, il vient

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)\, z + xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)\, z' = 0.$$

Mais puisque $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ est une solution particulière de l'équation donnée, on a $xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$ et

$$xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)\, z' = 0. \tag{37}$$

Mais $y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$ et donc $xy_1' + y_1 = \cos x$ et l'équation (37) devient

$$z'' \sin x + 2z' \cos x = 0.$$

Ecrivons-la sous la forme

$$\frac{z''}{z'} + 2\,\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

On en obtient $(\ln|z'| + 2\ln|\sin x|)' = 0$, d'où

$$\ln|z'| + 2\ln|\sin x| = \ln \tilde{C}_1 \quad \text{ou} \quad z' \sin^2 x = \tilde{C}_1.$$

L'intégration de cette équation donne $z = -\tilde{C}_1 \operatorname{ctg} x + C_2$ et par suite la solution générale de l'équation donnée sera

$$y = -\tilde{C}_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x},$$

ou

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \quad (C_1 = -\tilde{C}_1).$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$.

Solution. La solution générale de l'équation homogène associée est de la forme (v. exemple 1)

$$y_{\text{g. h}} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$$

et donc, son système fondamental de solutions sera

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \qquad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Cherchons la solution générale de l'équation donnée en appliquant la méthode de variation des constantes arbitraires:

$$y = C_1(x) \frac{\sin x}{x} + C_2(x) \frac{\cos x}{x},$$

où $C_1(x)$, $C_2(x)$ sont des fonctions de x pour l'instant inconnues qu'on doit déterminer. Composons à cet effet le système suivant:

$$\begin{cases} C_1'(x) \dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x) \dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x) \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + C_2'(x) \dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

On en tire $C_1'(x) = \cos x$, $C_2'(x) = -\sin x$. En intégrant, on obtient

$$C_1(x) = \sin x + \tilde{C}_1, \qquad C_2(x) = \cos x + \tilde{C}_2.$$

En introduisant ces valeurs de $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans l'expression de y on trouve la solution générale de l'équation donnée

$$y = \tilde{C}_1 \frac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Exemple 3. Résoudre l'équation $y'' + y = 1/\cos x$.

Solution. L'équation homogène associée sera $y'' + y = 0$. Son équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ possède des racines imaginaires

$\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ et la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y_{\text{g. h}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

La solution générale de l'équation initiale sera cherchée sous la forme

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \tag{38}$$

où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont des fonctions inconnues de x. Pour les rechercher, composons le système

$$\begin{cases} \cos x \cdot C_1'(x) + \sin x \cdot C_2'(x) = 0, \\ -\sin \cdot C_1'(x) + \cos x \cdot C_2'(x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Résolvons ce système par rapport à $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$, il vient

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x; \quad C_2'(x) = 1.$$

Intégrons, il vient

$$C_1(x) = \ln |\cos x| + \tilde{C}_1, \qquad C_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

En introduisant les expressions de $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans (38) on obtient la solution générale de l'équation initiale

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Ici, $\cos x \ln |\cos x| + x \sin x$ est une solution particulière de l'équation non homogène initiale.

Exemple 4. Connaissant le système fondamental de solutions $y_1 = \ln x$, $y_2 = x$ de l'équation homogène associée, trouver une solution particulière de l'équation

$$x^2(1 - \ln x)\, y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x} \tag{39}$$

qui satisfait à la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$.

Solution. En appliquant la méthode de variation des constantes, on trouve la solution générale de l'équation (39):

$$y = C_1 \ln x + C_2 x + \frac{1 - 2 \ln x}{4x}. \tag{40}$$

Lorsque $x \to +\infty$ les deux premiers termes au second membre de (40) tendent vers l'infini et quelles que soient C_1, C_2 non simultanément nulles, la fonction $C_1 \ln x + C_2 x$ est une fonction infiniment grande quand $x \to +\infty$. Le troisième terme au second membre de (40) a pour limite un zéro lorsque $x \to +\infty$, ce qu'on établit facilement à l'aide de la règle de L'Hopital. Ainsi, la fonction $y = (1 - 2 \ln x)/4x$ qui est obtenue à partir de (40) pour $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ sera une solution de l'équation (39) qui satisfait à la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$.

Intégrer les équations suivantes connaissant l'une des solutions particulières y_1 de l'équation homogène :

636. $(2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0$; $y_1 = e^{mx}$.

637. $(x^2 - x)\,y'' + (2x-3)\,y' - 2y = 0$; y_1 est une fraction rationnelle dont le dénominateur est représenté par des facteurs linéaires qui sont diviseurs du coefficient de y''.

638. $(3x + 2x^2)\,y'' - 6\,(1+x)\,y' + 6y = 6$; y_1 est un polynôme.

639. $x^2(\ln x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

640. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)\,y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$; $y_1 = \sin x$.

641. $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0$; $y_1 = \cos(\sin x)$.

642. $(1+x^2)\,y'' + xy' - y + 1 = 0$; $y_1 = x$.

643. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y = \frac{1}{x}$.

644. $(x-1)\,y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$; $y_1 = e^x$.

645. $y'' + y' + e^{-2x}\,y = e^{-3x}$; $y_1 = \cos e^{-x}$.

646. $(x^4 - x^3)\,y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)\,y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$; $y_1 = \frac{1}{x}$.

647. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1$, $y_1 = \sin e^x$.

648. $x(x-1)\,y'' - (2x-1)\,y' + 2y = x^2(2x-3)$, $y_1 = x^2$.

649. Une chaîne de 6 m de longueur glisse sans frottement sur une table. Combien de temps la chaîne mettra-t-elle pour tomber si elle commence son mouvement à l'instant où 1 m est suspendu ?

650. Trouver l'équation du mouvement d'un point si son accélération en fonction du temps s'exprime par la formule $a = 1,2t$ et si pour $t = 0$ la distance $s = 0$, alors que pour $t = 5$ la distance $s = 20$.

651. Un corps de masse m glisse sur un plan horizontal sous l'effet d'un choc qui lui a imprimé une vitesse initiale v_0. Le corps subit l'action de frottement égal à $-km$. Trouver la distance que le corps est capable de franchir.

652. Un point matériel de masse $m = 1$ est animé d'un mouvement rectiligne en s'approchant d'un centre qui le repousse avec une force égale à k^2x (x est la distance du point au centre). Pour $t = 0$, $x = a$, $\frac{dx}{dt} = ka$. Etablir la loi de mouvement de ce point.

Intégrer par la méthode de variation des constantes les équations suivantes :

653. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

654. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

655. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

656. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.

657. $y''-2y+y=\frac{e^x}{x^2+1}$.

658. $y''+2y'+2y=\frac{1}{e^x \sin x}$.

659. $y''+y=\frac{2}{\sin^3 x}$.

660. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$.

661. $y'''+y''=\frac{x-1}{x^2}$.

662. $xy''-(1+2x^2)y'=4x^3 e^{x^2}$.

663. $y''-2y'\cdot \operatorname{tg} x=1$.

664. $x\ln x\cdot y''-y'=\ln^2 x$.

665. $xy''+(2x-1)y'=-4x^2$.

666. $y''+y'\operatorname{tg} x=\cos x \operatorname{ctg} x$.

Trouver des solutions des équations différentielles suivantes pour des conditions données à l'infini :

667. $4xy''+2y'+y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$;

$y_1=\sin\sqrt{x}$, $y_2=\cos\sqrt{x}$.

668. $4xy''+2y'+y=\frac{6+x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

669. $(1+x)^2 y''+2xy'=\frac{1}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\frac{\pi^2}{8}$,

$y'|_{x=0}=0$.

670. $(1-x)y''+xy'-y=(x-1)^2 e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$,

$y|_{x=0}=1$; $y_1=x$, $y_2=e^x$.

671. $2x^2(2-\ln x)y''+x(4-\ln x)y'-y=$

$=\frac{(2-\ln x)^2}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$, $y_1=\ln x$, $y_2=\sqrt{x}$.

672. $y''+\frac{2}{x}y'-y=4e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, $y'|_{x=-1}=$

$=-\frac{1}{e}$; $y_1=\frac{e^x}{x}$, $y_2=\frac{e^{-x}}{x}$.

673. $x^3(\ln x-1)y''-x^2y'+xy=2\ln x$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$, $y_1=x$, $y_2=\ln x$.

674. $(x^2-2x)y''+(2-x^2)y'-2(1-x)y=2(x-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$,

$y_1=x^2$, $y_2=e^x$.

6°. Etablissement d'une équation différentielle à partir du système fondamental de solutions. Considérons un système de fonctions

$$y_1(x),\quad y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), \tag{41}$$

linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$ et admettant toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n y compris. Alors, l'équation

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{42}$$

où $y(x)$ est une fonction inconnue, sera une équation différentielle linéaire pour laquelle la fonction $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$ constitue, comme il est facile de l'établir, le système fondamental de solutions. Le coefficient de $y^{(n)}(x)$ dans l'équation (42) est le wronskien $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ du système (41). Les points en lesquels ce déterminant s'annule seront des points singuliers de l'équation établie : en ses points le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé $y^{(n)}(x)$ s'annule.

Exemple 1. Etablir une équation différentielle pour laquelle les fonctions $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ forment le système fondamental de solutions.

Solution. En appliquant la formule (42), on obtient

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

En développant le déterminant au premier membre de (43) suivant les éléments de la troisième colonne, on aura $y'' - y = 0$. Ce sera justement l'équation différentielle cherchée.

Exemple 2. Composer une équation différentielle pour laquelle le système fondamental de solutions est constitué par les fonctions $y_1(x) = e^{x^2}$, $y_2(x) = e^{-x^2}$.

Solution. Etablissons une équation de la forme (42) :

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y \\ 2x\,e^{x^2} & -2x\,e^{-x^2} & y' \\ (2+4x^2)\,e^{x^2} & (4x^2-2)\,e^{-x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 2x & -2x & y' \\ 2+4x^4 & 4x^2-2 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le dernier déterminant suivant les éléments de la 3-ième colonne, on aura

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0. \tag{44}$$

Dans cet exemple, le wronskien $W[y_1, y_2] = -4x$ s'annule pour $x = 0$. Ce fait n'est pas en contradition avec la théorie générale

d'après laquelle le wronskien du système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0$$

à coefficients continus sur le segment $[a, b]$ ne s'annule en aucun point x du segment $[a, b]$. En écrivant l'équation (44) sous la forme

$$y'' - \frac{1}{x} y' - 4x^2 y = 0, \tag{45}$$

nous voyons que le coefficient de y' présente une discontinuité pour $x = 0$ de sorte que la continuité des coefficients de l'équation (45) est troublée au point $x = 0$.

Composer des équations différentielles pour lesquelles les systèmes de fonctions données forment les systèmes fondamentaux de solutions :

675. $y_1(x) = \operatorname{sh} x, \qquad y_2(x) = \operatorname{ch} x.$
676. $y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = e^x.$
677. $y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^{x^2/2}.$
678. $y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2.$
679. $y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = \sin x,\ y_3(x) = \cos x.$

7°. **Problèmes divers.** Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ le système fondamental de solutions de l'équation linéaire homogène

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0.$$

On peut alors appliquer la formule d'Ostrogradsky-Liouville

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt},$$

où $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ est le wronskien, et x_0 toute valeur de x sur le segment $[a, b]$ sur lequel les coefficients $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ de l'équation sont continus.

Exemple 1. Montrer que l'équation différentielle linéaire $xy'' - (x + 2)\, y' + y = 0$ admet une solution de la forme $y_1 = P(x)$, où $P(x)$ est un certain polynôme. Montrer qu'une deuxième solution y_2 de cette équation est de la forme $y_2 = e^x Q(x)$, où $Q(x)$ est aussi un polynôme.

Solution. Cherchons la solution $y_1(x)$ sous la forme d'un polynôme, par exemple du premier degré : $y_1 = Ax + B$. En portant dans l'équation, on trouve que $-2A + B = 0$. Soit $A = 1$, alors $B = 2$; ainsi le polynôme $y_1 = x + 2$ sera solution de l'équation donnée. Ecrivons l'équation donnée sous la forme

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0.$$

Soit $y_2(x)$ une deuxième solution particulière de l'équation donnée linéairement indépendante de la première. Cherchons le wronskien du système de solutions $y_1 = x + 2$, y_2:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x+2 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = (x+2)\,y_2' - y_2,$$

ici, $x \neq -2$. En appliquant la formule d'Ostrogradsky-Liouville, on aura

$$(x+2)\,y_2' - y_2 = W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x} \frac{t+2}{t}\,dt},$$

où x_0 est toute valeur de x et $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq -2$ ou

$$(x+2)\,y_2' - y_2 = Ax^2e^x;$$

ici,

$$A = \frac{W(x_0)\,e^{-x_0}}{x_0^2} = \text{const}.$$

Nous avons obtenu pour déterminer y_2 une équation différentielle linéaire du premier ordre. En divisant les deux membres de cette équation par $(x+2)^2$, on la ramène à la forme

$$\left(\frac{y_2}{x+2}\right)' = A\,\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}.$$

Intégrons, il vient

$$\frac{y_2}{x+2} = A\,\frac{x-2}{x+2}\,e^x; \qquad \text{d'où} \qquad y_2 = A\,(x-2)\,e^x.$$

680. Montrer que l'équation différentielle linéaire $(x^2 - 1)\,y'' = 2y$ a comme solution un certain polynôme $y_1(x) = P(x)$. Montrer qu'une deuxième solution $y_2(x)$ de cette équation est de la forme

$$y_2(x) = P(x)\ln\frac{x+1}{x-1} + Q(x),$$

où $Q(x)$ est aussi un polynôme.

681. Trouver la solution générale de l'équation différentielle linéiare homogène du second ordre $y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$ connaissant l'une de ses solutions particulières $y_1 = y_1(x)$.

682. Soit $y_1(x)$, $y_2(x)$ le système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0.$$

Exprimer les coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ par $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

683. Démontrer que deux solutions de l'équation $y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$ à coefficients continus, présentant un maximum pour une seule et même valeur de x, sont linéairement dépendantes.

684. Démontrer que le rapport de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$ à coefficients continus ne peut pas avoir de points à maximum local.

685. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 toute solution de l'équation $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ (p_1, p_2 = const) s'annulle-t-elle sur l'ensemble infini des points x?

686. Soient données deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$, solutions respectivement des équations $u'' + p(x)\,u = 0$ et $v'' + q(x)\,v = 0$ satisfaisant à la condition $u(a) = 0$, $v(a) = 0$ ($p(x)$ et $q(x)$ sont continues sur le segment $[a, b]$). Démontrer que le wronskien de ces solutions aura pour expression

$$W[u(x), v(x)] = \int_a^x [p(t) - q(t)]\,u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

687. Démontrer que quelles qu'elles soient, deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation linéaire homogène $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ ne peuvent pas s'annuler simultanément en un seul et même point x_0.

688. Démontrer que si $y_1(x)$ est une solution particulière de l'équation linéaire homogène $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ telle que $y_1(x) \not\equiv 0$, alors l'équation $y_1(x) = 0$ ne peut pas avoir de racines multiples.

689. Montrer que la substitution $y = v(x)\,z(x)$ transforme l'équation linéaire homogène $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ en une nouvelle équation linéaire homogène. La fonction $v(x)$ comment doit-elle être choisie pour que l'équation transformée ne comporte pas de terme en dérivée première?

690. Démontrer qu'une solution de l'équation $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = f(t)$ qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ est de la forme

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

691. Pour quelles valeurs de p et q toutes les solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ tendent-elles vers zéro lorsque $x \to +\infty$?

692. Pour quelles valeurs de p et q toutes les solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ (p, q = const) sont-elles des fonctions périodiques de x?

693. Soit une fonction $y(x)$ qui est solution de l'équation $(1 + x^2)\,y'' - x^3y' = x^2 + 4$ sur le segment $[a, b]$, la solution de cette équation satisfaisant aux conditions aux limites $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.

Démontrer que pour tous les x de l'intervalle (a, b) on aura $y(x) < 0$.

694. Démontrer que dans le cas où $q(x) < 0$ les solutions de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ne peuvent pas avoir de maximums positifs.

695. Démontrer que dans le cas où $q(x) > 0$, pour toute solution de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ le rapport $y'(x)/y(x)$ décroît, lorsque x croît sur l'intervalle, où $y(x) \neq 0$.

§ 16. Méthode des isoclines pour les équations différentielles du second ordre

La méthode des isoclines (v. § 2) s'applique aussi à la résolution de certaines équations de deuxième ordre. Ce sont des équations qui peuvent être ramenées aux équations du premier ordre, par exemple les équations de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = 0. \tag{1}$$

Introduisons une nouvelle variable $v = \frac{dx}{dt}$. Alors $\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$ et l'équation (1) prend la forme

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(v, x)}{v}. \tag{2}$$

C'est une équation du premier ordre dans laquelle x est une variable indépendante si bien que sa solution peut s'obtenir par la méthode des isoclines. Entendons par la valeur x la translation d'un point quelconque du système et par $\frac{dx}{dt} = v$ sa vitesse.

Le plan des variables x, v s'appelle *plan de phase*. Ainsi, l'équation (2) définit la vitesse en tant que fonction de la translation. En construisant le champ des isoclines pour l'équation (2) nous pouvons tracer la courbe intégrale si le point initial (x_0, v_0) est donné. Une telle représentation graphique de la vitesse v en tant que fonction de la translation $x: v = v(x)$ s'appelle *image de phase*. Les courbes représentant cette dépendance dans le plan x, v s'appellent *trajectoires de phase*. Les valeurs instantanées de x et v s'appellent coordonnées d'un point de la trajectoire de phase. Ce point est dit *figuratif*. Avec le temps, le point figuratif se déplace sur la trajectoire de phase. Remarquons qu'une vitesse positive fait croître la translation avec le temps. En effet, d'après la substitution $v = \frac{dx}{dt}$ pour $v > 0$ et $\frac{dx}{dt} > 0$, cela signifie la croissance de x lorsque t augmente. Ainsi, dans la partie supérieure du plan de phase où $v > 0$, le point figuratif doit se déplacer de gauche à droite et dans la partie

inférieure du plan où $v < 0$, de droite à gauche. C'est pourquoi le déplacement suivant la trajectoire de phase s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exemple 1. Construire les trajectoires dans le plan de phase pour l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{3}$$

Solution. Posons $\frac{dx}{dt} = v$. Alors l'équation (3) devient

$$v\frac{dv}{dx} + x = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v}. \tag{4}$$

L'équation des isoclines pour (4) est : $-x/v = k$. En traçant des isoclines correspondant à diverses valeurs de k, on trouve que les

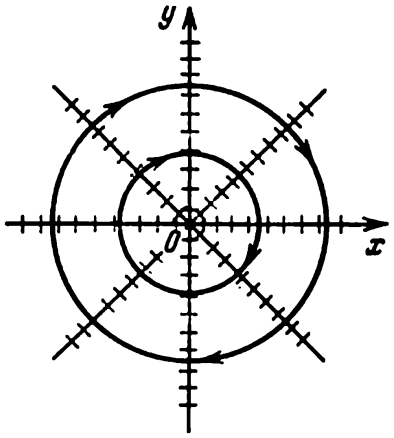

Fig. 26

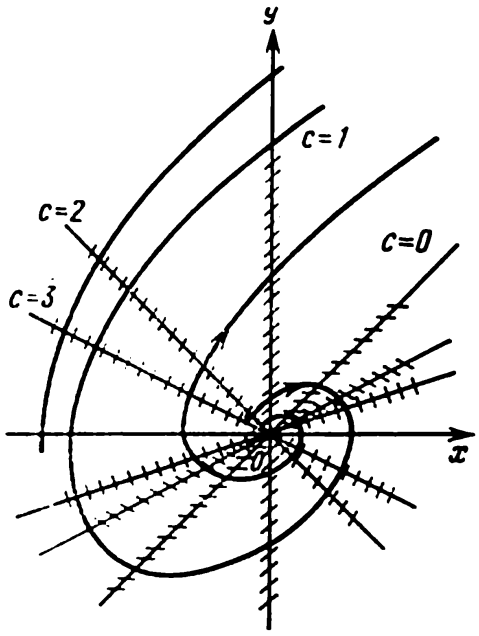

Fig. 27

trajectoires de phase sont des circonférences ayant comme centre le point (0, 0) (fig. 26).

Remarquons que des trajectoires de phase fermées correspondent aux mouvements périodiques. On établit facilement que dans le cas de l'équation (3) nous avons réellement un mouvement périodique. En résolvant l'équation (3) par des méthodes exposées plus haut, on trouve

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Exemple 2. Construire les trajectoires de phase pour l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{5}$$

Solution. Posons $v = \frac{dx}{dt}$. Alors l'équation (5) prend la forme

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v-x}{v}.$$

L'équation des isoclines est $\frac{v-x}{v} = k$. Les trajectoires de phase présentent l'aspect des spirales déroulantes (fig. 27). L'examen de l'image de phase montre que le mouvement est apériodique et que son amplitude croît indéfiniment avec le temps.

Construire les trajectoires de phase pour les équations différentielles suivantes :

696. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0.$

697. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = 0.$

698. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$

699. $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = 0.$

700. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$

701. $\frac{d^2x}{dt^2} - x \cdot \exp\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \qquad (\exp u \equiv e^u).$

702. $\frac{d^2x}{dt^2} + \exp\left(-\frac{dx}{dt}\right) - x = 0.$

703. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0.$

704. $\frac{d^2x}{dt^2} + (x+2)\frac{dx}{dt} = 0.$

705. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x - x^2 = 0.$

§ 17. Problèmes aux limites

Considérons pour simplifier une équation du second ordre

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0. \tag{1}$$

Les coefficients $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont supposés continus dans un certain intervalle (a, b). Alors chaque solution $y(x)$ de l'équation (1) sera définie dans tout cet intervalle. Par la suite, nous allons considérer au lieu de l'équation (1) une équation de la forme

$$[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0, \qquad p(x) > 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) peuvent se transformer l'une en l'autre. Les équations de la forme (2) sont dites *auto-adjointes.*

La solution de l'équation différentielle

$$[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$$

est entièrement définie par les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Pourtant pour de nombreux problèmes de physique on est amené à chercher une solution définie par un autre procédé. Par exemple, un problème peut être posé comme suit : trouver la solution de l'équation (2) qui prend aux points a et b les valeurs données $y(a)$ et $y(b)$. Le plus souvent, dans de tels cas on ne cherche les solutions que pour x compris dans (a, b). Ainsi, les valeurs données $y(a)$ et $y(b)$ se trouvent aux extrémités de l'intervalle, ce qui explique le nom de *problèmes aux limites*. Dans ce qui suit nous considérons comme intervalle de base, l'intervalle $(0, \pi)$, ce qui ne restreint pas la généralité des raisonnements.

Pour les équations du second ordre les conditions aux limites se présentent le plus souvent sous la forme

$$h_0 y(0) + h_1 y'(0) = A, \qquad k_0 y(\pi) + k_1 y'(\pi) = B, \tag{3}$$

où h_0, h_1, k_0, k_1, A, B sont des constantes données et h_0, h_1, k_0, k_1 ne sont pas simultanément nuls.

Si $A = B = 0$, les conditions aux limites sont dites *homogènes*, par exemple

1) $y(0) = y(\pi) = 0$,
2) $h_0 y(0) = y'(0)$, $y'(\pi) = -h_1 y(\pi)$; $h_0, h_1 > 0$,
3) $y'(0) = y'(\pi) = 0$,
4) $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

En général, les problèmes aux limites ne sont pas toujours résolubles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas toujours une solution qui prend des valeurs exigées aux extrémités de l'intervalle. Par exemple le problème aux limites

$$y'' = 0, \qquad y(0) - y(\pi) = 1, \qquad y'(0) + y'(\pi) = 0$$

n'a aucune solution. Le problème

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4}$$

possède une solution non nulle seulement pour des valeurs entières de $\sqrt{\lambda}$. En effet, de la solution générale de l'équation différentielle (4)

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

il résulte que les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que si et seulement si $\lambda = n^2$ est le carré d'un nombre entier n. Les solutions correspondantes sont des fonctions $y_n = \sin nx$.

Comme il résulte de cet exemple, si q figurant dans l'équation (2) est une fonction de paramètre λ, alors il existe, dans des conditions déterminées, des valeurs du paramètre pour lesquelles le problème aux limites homogène pour l'équation (2) possède une

solution non nulle. Ces valeurs de λ sont dites *propres* et les solutions du problème aux limites qui leur correspondent s'appellent *fonctions propres*. Ces dernières ne sont définies qu'à un facteur constant quelconque près. C'est ainsi que pour le problème aux limites $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ les nombres 1^2, 2^2, 3^2, . . . et les fonctions $\sin x$, $\sin 2x$, . . . sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres du problème.

A côté des valeurs propres *simples* quand à une seule valeur propre correspond une seule fonction propre (à un facteur constant près), il existe des valeurs propres *multiples* lorsque à une valeur propre λ_0 correspondent deux ou plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes.

Pour la résolution des problèmes aux limites (pour les équations différentielles linéaires homogènes) on procède comme suit: on cherche la solution générale de l'équation différentielle donnée

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

où $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes. Puis, on exige que la solution $y(x)$ satisfasse aux conditions aux limites données. Il en résulte un certain système linéaire d'équations pour déterminer C_1, C_2, . . ., C_n. En résolvant ce système, si c'est possible, on trouve la solution du problème aux limites donné. Dans ces conditions, s'il devient nécessaire de trouver les valeurs propres, la condition d'existence d'une solution non nulle du système déterminant C_1, C_2, . . ., C_n est une condition qui détermine les valeurs propres. C'est en général une certaine équation transcendante pour λ.

Exemple 1. Résoudre le problème aux limites

$$y'' - y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Solution. La solution générale de cette équation est

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \tag{5}$$

d'où

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}. \tag{6}$$

En posant $x = 0$ dans (6) et $x = 1$ dans (5) et compte tenu des conditions aux limites, on obtient pour déterminer les constantes C_1 et C_2 un système linéaire non homogène

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-1} + e = 2 \operatorname{ch} 1 \neq 0,$$

et donc, il a l'unique solution

$$C_1 = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,1}, \qquad C_2 = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,1}.$$

En introduisant les valeurs obtenues de C_1 et C_2 dans (5), on obtient la solution du problème aux limites donné :

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2\,\mathrm{ch}\,1}, \qquad \text{ou} \qquad y(x) = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,1}.$$

Exemple 2. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres du problème aux limites

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad (\lambda \neq 0), \tag{7}$$

$$y'(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0. \tag{8}$$

Solution. La solution générale de l'équation (7) est

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x; \tag{9}$$

d'où

$$y'(x) = -C_1\lambda \sin \lambda x + C_2\lambda \cos \lambda x. \tag{10}$$

En posant $x = \pi$ dans (9) et $x = 0$ dans (10) et en tenant compte des conditions aux limites (8), on obtient pour déterminer C_1 et C_2 un système linéaire homogène

$$\begin{cases} C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi = 0, \\ C_2\lambda = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Le système (11) n'a des solutions non nulles que si, et seulement si son déterminant est nul ; en l'égalant à zéro, on obtient une équation pour déterminer les valeurs propres du problème aux limites donné :

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda\pi & \sin \lambda\pi \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lambda \cos \lambda\pi = 0.$$

Puisque par hypothèse $\lambda \neq 0$, on a $\cos \lambda\pi = 0$ et donc les valeurs propres sont

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2n+1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A ces valeurs propres correspondent (à un facteur constant C_1 près, qui peut être posé égal à l'unité) les fonctions propres

$$y_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x,$$

qui sont solutions du problème aux limites (7)-(8).

Remarque. Les valeurs propres des problèmes considérés plus haut forment une suite numérique croissante. Si les coefficients de l'équation différentielle possèdent un point singulier à la limite du

domaine principal ou si le domaine principal est infini et, par exemple, représente tout l'axe numérique, le *spectre*, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres peut présenter une autre structure. En particulier, on peut rencontrer des spectres contenant tous les nombres d'un intervalle quelconque de valeurs de λ qu'on appelle spectres continus. Soit à chercher, par exemple, la solution de l'équation $y'' + \lambda y = 0$ sur l'intervalle $-\infty < x < +\infty$ pour des « conditions aux limites » suivantes: $y(x)$ est bornée à l'infini. Il est évident que dans ce cas tout nombre non négatif λ est valeur propre avec des fonctions propres $\sin \sqrt{\lambda} x$ et $\cos \sqrt{\lambda} x$.

Lors de la résolution des problèmes de physique mathématique qui conduisent à des problèmes sur la détermination des valeurs propres on obtient souvent des équations différentielles de la forme

$$[p(x)\, y']' - q(x)\, y + \lambda \rho(x)\, y = 0,$$

mais telles que l'équation différentielle présente des singularités aux points frontiers du domaine principal, par exemple l'annulation du coefficient $p(x)$. Mais pour ces points singuliers il découle de la nature même du problème des conditions telles que la solution doit être continue ou bornée ou encore transformée en infinie d'un ordre non supérieur à un ordre donné. Ces conditions jouent le rôle de conditions aux limites. Un exemple type est fourni par l'équation de Bessel

$$(xy')' - \frac{n^2}{x} y + \lambda xy = 0, \tag{12}$$

qui apparaît dans des problèmes de physique mathématique. Ici, $p(x) \equiv x$ et la supposition faite plus haut que $p(x) > 0$ dans tout le domaine principal $0 \leqslant x \leqslant 1$ n'est plus satisfaite car $p(0) = 0$. Le point $x = 0$ est un point singulier pour l'équation de Bessel.

L'exigence que la solution soit bornée en ce point sera une condition aux limites de type spécial pour l'équation de Bessel qui consiste à trouver une solution de l'équation (12) qui est bornée pour $x = 0$ et qui s'annule pour $x = 1$, par exemple.

Exemple 3. Résoudre le problème aux limites $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$, $y(1) = 1$; $y(x)$ est borné pour $x \to 0$.

Solution. Cette équation est une équation d'Euler. Sa solution générale est de la forme $y(x) = C_1/x^3 + C_2x^2$ (v. § 15, n° 4, exemple 1). Par hypothèse, la solution $y(x)$ doit être bornée lorsque $x \to 0$. Cette condition sera satisfaite si on pose $C_1 = 0$ dans la solution générale. Alors on aura $y(x) = C_2x^2$. La condition aux limites $y(1) = 1$ donne $C_2 = 1$. La solution cherchée est donc $y = x^2$.

706. Pour quelles conditions l'équation $y'' + \lambda y = 0$ a-t-elle une solution non nulle qui satisfait aux conditions

a) $y'(0) = y'(\pi) = 0$,

b) $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$?

707. Pour quelles valeurs de λ le problème aux limites $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ a-t-il la solution triviale $y \equiv 0$?

708. Lequel des problèmes aux limites suivants est résoluble:

a) $y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 1,$

b) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 1$?

709. Résoudre le problème aux limites $y'' + (\lambda - \omega^2) y = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$. Etudier les cas de $\lambda - \omega^2 > 0$, $\lambda - \omega^2 = 0$, $\lambda - \omega^2 < 0$.

710. Trouver une solution de l'équation $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ qui passe par les points (0, 1) et (1, 2).

Résoudre les problèmes aux limites suivants:

711. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha$.

712. $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

713. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

714. $y'' + \alpha y' = 0$, $y(0) = e^{\alpha}$, $y'(1) = 0$.

715. $y'' + \alpha^2 y = 1$, $y'(0) = \alpha$, $y'(\pi) = 0$ $(0 < \alpha < 1)$.

716. $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

717. $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

718. $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

719. $y''' + y'' - y' - y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y(1) = 0$.

720. $y^{IV} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

721. $xy'' + y' = 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$, $y(x)$ est bornée pour $x \to 0$.

722. $x^2 y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ est bornée pour $x \to 0$.

723. $x^3 y^{IV} + 6x^2 y''' + 6xy'' = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ est bornée pour $x \to 0$.

§ 18. Intégration des équations différentielles à l'aide de séries

1°. Développement de la solution en série entière. Ce procédé s'avère commode dans le cas des équations différentielles linéaires. Illustrons son application sur l'exemple d'une équation du second ordre. Soit donnée une équation différentielle du second ordre

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0. \tag{1}$$

Supposons que les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ puissent être représentés sous forme de séries suivant les puissances entières positives de x

si bien que l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) y' + \\ + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) y = 0. \qquad (2)$$

Cherchons la solution de cette équation aussi sous la forme d'une série entière

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \qquad (3)$$

En introduisant cette expression de y et de ces dérivées dans (2), on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \qquad (4)$$

En multipliant les séries entières, en groupant les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de x au premier membre de (4), on obtient une série d'équations

$$\begin{array}{l|l} x_0 & 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0, \\ \cdot & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (5)$$

Chacune des équations suivantes (5) comporte un coefficient de plus que l'équation précédente. Les coefficients c_0 et c_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes arbitraires. La première des équations (5) donne c_2, la deuxième c_3, la troisième c_4 et ainsi de suite. En général, à partir de la $(k+1)$-ième équation on peut déterminer c_{k+2}, connaissant $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$.

En pratique il est commode de procéder comme suit: d'après le schéma décrit plus haut on cherche deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$, en choisissant pour $y_1(x)$, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ et pour $y_2(x)$, $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$, ce qui est équivalent aux conditions initiales suivantes:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Toute solution de l'équation (1) sera une combinaison linéaire de solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Si les conditions initiales sont de la forme $y(0) = A$, $y'(0) = B$, il est évident que

$$y = Ay_1(x) + By_2(x).$$

On peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si les séries*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{et} \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

convergent pour $|x| < R$, *alors la série entière* (3) *construite par le procédé indiqué plus haut sera aussi convergente pour toutes les valeurs de* x *et constituera une solution de l'équation* (1).

En particulier, si $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes en x, la série (3) sera convergente pour toute valeur de x.

Exemple 1. Trouver la solution de l'équation

$$y'' - xy' - 2y = 0 \tag{6}$$

sous forme d'une série entière.

Solution. Cherchons $y_1(x)$ sous forme de la série

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

alors

$$y_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

En introduisant $y_1(x)$, $y'_1(x)$ et $y''(x)$ dans (6), on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) k c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \tag{7}$$

En groupant dans (7) les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de x, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$.

Posons, pour fixer les idées, $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. Alors on trouve tout de suite que

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 0. \tag{8}$$

Ainsi, on a

x^0 | $2c_2 - 2c_0 = 0$, d'où, compte tenu de (8) $c_2 = 1$,
x^1 | $3 \cdot 2c_3 - 1 \cdot c_1 - 2c_1 = 0$, d'où, compte tenu de (8) $c_3 = 0$,
x^2 | $4 \cdot 3c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0$, d'où $c_4 = \frac{1}{3}$,
x^3 | $5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0$, d'où $c_5 = 0$,
x^4 | $6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0$, d'où $c_6 = \frac{c_4}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5}$,
. | . . . . . .

Par conséquent,

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{15}x^6 + \ldots. \tag{9}$$

De façon analogue, en prenant

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \tag{10}$$

et les conditions initiales $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, on obtient

$$A_0 = 0, \qquad A = 1. \tag{11}$$

En portant (10) dans (6), on trouve

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) A_k x^k = 0,$$

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2A_2 = 0, \ A_2 = 0, \\
x^1 & 3 \cdot 2A_3 - 3A_1 = 0. \ A_3 = \frac{1}{2} \text{ (d'après (11)}, \\
x^2 & 4 \cdot 3A_4 - 4A_2 = 0, \ A_4 = 0, \\
x^3 & 5 \cdot 4A_5 - 5A_3 = 0, \ A_5 = \frac{1}{2 \cdot 4}, \\
x^4 & 6 \cdot 5A_6 - 6A_4 = 0, \ A_6 = 0, \\
x^5 & 7 \cdot 6A_7 - 7A_5 = 0, \ A_7 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Il est évident que

$$A_{2k} = 0, \ A_{2k+1} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} \ (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

et donc,

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = xe^{x^2/2}. \tag{12}$$

La solution générale de l'équation (6) sera de la forme

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont définies par les formules (9) et (12) respectivement, alors que A et B sont des constantes arbitraires telles que $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

Indiquons encore un procédé d'intégration des équations différentielles à l'aide de séries qui s'avère plus simple dans le cas des équations différentielles non linéaires. Soit donnée une équation différentielle

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{13}$$

et les conditions initiales

$$y|_{x=x_0} = y_0, \ y'|_{x=x_0} = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{14}$$

Introduisons une définition :

une fonction $\varphi(x)$ est dite *holomorphe* dans un certain voisinage $|x - x_0| < \rho$ du point $x = x_0$ si, dans ce voisinage, elle peut être

représentée par une série entière

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

convergente dans le domaine $|x - x_0| < \rho$.

De façon analogue, une fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dite *holomorphe par rapport à tous ses arguments* dans un certain voisinage

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \rho_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

du point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ si elle est représentable par une série entière

$$\varphi(x_1 x_2, \ldots, x_n) = \sum c_{k_1 k_2 \ldots k_n} (x_1 - x_1^{(0)})^{k_1} \times$$
$$\times (x_2 - x_2^{(0)})^{k_2} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{k_n},$$

convergente dans le domaine

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \rho_k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Théorème. *Si le second membre de l'équation* (13) *est holomorphe par rapport à tous ses arguments* $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *dans le voisinage* Ω :

$$|x - x_0| < R, \ |y - y_0| < R_1, \ |y' - y_0'| < R_1, \ \ldots,$$
$$|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| < R_1$$

du point $(x_0, y_0, y', \ldots, y_0^{(n-1)})$, *alors l'équation* (13) *possède l'unique solution*

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \ \left(a_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}\right), \qquad (15)$$

qui satisfait aux conditions initiales (14) *et est holomorphe dans un certain voisinage du point* $x = x_0$.

La série (15) converge dans le domaine

$$|x - x_0| < \rho, \ \text{où} \ \rho = a\left[1 - e^{-\frac{b}{(n+1)aM}}\right];$$

où a et b sont des constantes qui satisfont aux conditions $0 < a < R$, $0 < b < R$ et

$$M = \max_{\Omega} |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|.$$

Les premiers $n + 1$ coefficients de la série (15) sont déterminés par les conditions initiales (14) et l'équation différentielle (13). Les coefficients suivants de la série se déterminent d'après l'équation

différentielle (13) par ses dérivations successives. Par exemple

$$a_{n+1} = \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

où

$$y^{(n+1)}|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)}\right)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \cdot y_0' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\Big|_{x=x_0} \cdot y^{(k+1)}(x_0).$$

Remarque. Si l'équation (13) est linéaire

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = \psi(x),$$

où $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions holomorphes sur tout l'axe Ox, la série (15) est convergente aussi sur tout l'axe.

Exemple 2. Trouver une solution de l'équation

$$y'' + y = 0 \tag{16}$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0. \tag{17}$$

Solution. Une solution particulière de l'équation (16) qui satisfait aux conditions initiales (17) sera cherchée sous la forme de la série

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \ldots, \tag{18}$$

où $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

De l'équation donnée on trouve que $y''(0) = -y(0) = -1$. En dérivant successivement les deux membres de l'équation (16) et en posant dans les égalités obtenues $x = 0$, on aura

$$y'''(0) = -y'(0) = 0,$$
$$y^{IV}(0) = -y''(0) = 1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k-1 \\ (-1)^k, & \text{si } n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Introduisons les valeurs trouvées de $y''(0)$, $y'''(0)$, ... dans la série (18). On obtient la solution cherchée sous la forme de la série entière

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \ldots. \tag{19}$$

Il est évident que la série au second mèmbre de (19) converge sur tout l'axe Ox vers la fonction $y = \cos x$ qui est solution du problème de Cauchy posé.

Exemple 3. Trouver les quatre premiers termes du développement en série de Taylor de la solution $y = y(x)$ de l'équation $y'' = e^{xy}$ qui satisfait aux conditions initiales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

Solution. Il est facile d'établir que le second membre de l'équation, c'est-à-dire la fonction e^{xy} se développe en une série entière suivant les puissances de x et y dans le voisinage du point (0, 0) qui converge dans le domaine $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ (c'est-à-dire que le second membre est holomorphe).

Cherchons une solution particulière sous la forme de la série

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (20)$$

En utilisant l'équation elle-même, on trouve $y''(0) = e^{xy}|_{x=0} = 1$.

Dérivons successivement les deux membres de l'équation et posons $x = 0$ dans les égalités obtenues, il vient

$$y'''(0) = (y + xy')\,e^{xy}|_{x=0} = 1,$$
$$y^{IV}(0) = [2y' + xy'' + (y + xy')^2]\,e^{xy}|_{x=0} = 1.$$

En introduisant dans la série (20) les valeurs trouvées de $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{IV}(0)$, on obtient le développement cherché de la solution

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Dans les problèmes ci-dessous, trouver les trois premiers termes du développement en série entière de la solution de l'équation donnée pour les conditions initiales indiquées :

724. $y' = 1 - xy$, $\quad y|_{x=0} = 0$.

725. $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$, $\quad y|_{x=0} = 1$.

726. $y' = \sin xy$, $\quad y|_{x=0} = 1$.

727. $y'' + xy = 0$, $\quad y|_{x=0} = 0$, $\quad y'|_{x=0} = 1$.

728. $y'' - \sin xy' = 0$, $\quad y|_{x=0} = 0$, $\quad y'|_{x=0} = 1$.

729. $xy'' + y\sin x = x$, $\quad y|_{x=\pi} = 1$, $\quad y'|_{x=\pi} = 0$.

730. $y''\ln x - \sin xy = 0$, $\quad y|_{x=e} = e^{-1}$, $\quad y'|_{x=e} = 0$.

731. $y''' + x\sin y = 0$, $\quad y|_{x=0} = \pi/2$, $\quad y'|_{x=0} = 0$, $\quad y''|_{x=0} = 0$.

Intégrer à l'aide de séries les équations différentielles suivantes :

732. $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

733. $y'' + xy' + y = 0$.

734. $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Dans les problèmes 735 à 738 trouver les six premiers termes du développement de $y(x)$:

735. $y'' - (1 + x^2)\, y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 2.$

736. $y'' = x^2 y - y',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

737. $y'' - ye^x = 0.$

738. $y' = e^y + xy,\ y(0) = 0.$

2°. Développement d'une solution en une série entière généralisée. Equation de Bessel. On dit qu'un point x_0 est *un point ordinaire* de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{21}$$

si les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont holomorphes en ce point; dans le cas contraire, le point x_0 s'appelle *point singulier* de l'équation différentielle (21).

Une série de la forme

$$x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ (c_0 \neq 0), \tag{22}$$

où ρ est un nombre donné et la série entière $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ converge dans un certain domaine $|x| < R$, s'appelle *série entière généralisée*.

Si ρ est un entier non négatif, la série entière généralisée (22) se transforme en une série entière ordinaire.

Théorème. *Si le point $x = 0$ est un point singulier de l'équation* (21), *les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation peuvent être représentés sous la forme*

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x}, \quad q(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{x^2},$$

où les séries aux numérateurs convergent dans un certain domaine $|x| < R$ et les coefficients a_0, b_0 et b_1 ne sont pas simultanément nuls, alors l'équation (21) *possède au moins une solution sous la forme de la série entière généralisée*

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ (c_0 \neq 0), \tag{22}$$

qui converge au moins dans le même domaine $|x| < R$.

Pour déterminer l'exposant ρ et les coefficients c_k il faut introduire la série (22) dans l'équation (21), simplifier par x^ρ et annuler les coefficients de toutes les puissances de x (méthode des coefficients indéterminés).

Dans ce cas, le nombre ρ se détermine à partir de l'équation *dite déterminante*

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \tag{23}$$

où

$$a_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \quad b_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x). \tag{24}$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation déterminante (23). Trois cas différents peuvent se présenter.

1. Si la différence $\rho_1 - \rho_2$ n'est pas égale à un entier ou à zéro, alors on peut construire deux solutions de la forme (22)

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ (c_0 \neq 0), \quad y_2 = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \ (A_0 \neq 0).$$

2. Si la différence $\rho_1 - \rho_2$ est un entier positif, on ne peut construire en général qu'une seule série (solution de l'équation (21))

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{25}$$

3. Si l'équation (23) possède une racine multiple $\rho_1 = \rho_2$ on peut construire seulement une série qui est solution de (25). Il est clair que les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ construites dans le premier cas seront linéairement indépendantes (c'est-à-dire que leur rapport ne sera pas une constante).

Dans les deuxième et troisième cas nous n'avons construit qu'une seule solution. Remarquons que si la différence $\rho_1 - \rho_2$ est un entier positif ou zéro, l'équation (21) aura en plus de la solution (25) encore une solution de la forme

$$y_2 = Ay_1(x) \ln x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{26}$$

Dans ce cas, $y_2(x)$ contient un terme supplémentaire de la forme $Ay_1(x) \ln x$, où $y_1(x)$ est donné sous la forme (25).

Remarque. Il se peut que la constante A dans (26) soit nulle; dans ce cas on obtient pour y_2 une expression sous la forme d'une série entière généralisée.

Exemple 4. Résoudre l'équation

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)\, y' - (x + 1)\, y = 0. \tag{27}$$

Solution. Ecrivons (27) sous la forme

$$y'' + \frac{3x - 2x^2}{2x^2} y' - \frac{x+1}{2x^2} y = 0$$

ou

$$y'' + \frac{3 - 2x}{2x} y' - \frac{x+1}{2x^2} y = 0.$$

Cherchons la solution $y(x)$ sous la forme

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \quad (C_0 \neq 0).$$

Pour déterminer ρ écrivons l'équation déterminante

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0,$$

où

$$a_0 = \lim_{x \to 0} \frac{3-2x}{2} = \frac{3}{2}, \quad b_0 = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $\rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0$, ou

$$\rho^2 + \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0; \text{ d'où } \rho_1 = 1/2, \quad \rho_2 = -1.$$

En vertu de la règle énoncée plus haut, prenons

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \quad (x > 0); \quad y_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

Pour trouver $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$, il faut introduire $y_1(x)$ et ses dérivées $y_1'(x)$ et $y_1''(x)$ dans l'équation (27)

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{1}{2}},$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{3}{2}}.$$

L'introduction de $y_1(x)$, $y_1'(x)$ et $y_1''(x)$ dans (27) donne

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) C_k x^{k-\frac{3}{2}} + (3x - 2x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{1}{2}} -$$

$$- (x+1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}} = 0. \quad (28)$$

Après les transformations la relation (28) s'écrira

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(2k+3) C_k x^{k+1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) C_k x^{k+3/2} = 0. \quad (29)$$

Puisque nous cherchons une solution pour $x > 0$, la relation (29) peut se simplifier par $x^{1/2}$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(2k+3) C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) C_k x^{k+1} = 0. \quad (30)$$

On en trouve des relations pour la détermination des coefficients

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 1\cdot 5C_1 - 2\cdot 1C_0 = 0, \\ x^2 & 2\cdot 7C_2 - 2\cdot 2C_1 = 0, \\ x^3 & 3\cdot 9C_3 - 2\cdot 3C_2 = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n & n(2n+3)C_n - 2nC_{n-1} = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{31}$$

En posant dans $C_0 = 1$ la première équation des relations (31), on obtient $C_1 = 2/5$. De la deuxième équation on déduit $C_2 = \frac{2^2}{5\cdot 7}$. De la troisième, on déduit $C_3 = \frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 8}$ et ainsi de suite. Il est facile de remarquer que

$$C_n = \frac{2^n}{5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n+3)} (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

et donc

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot 9\ldots(2k+3)}\right]. \tag{32}$$

En opérant d'une manière analogue, on trouve les coefficients A_k. Il s'avère que pour $A_0 = 1$ on a

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2!}, \ldots, A_k = \frac{1}{k!},$$

si bien que

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{ou} \quad y_2(x) = \frac{e^x}{x}. \tag{33}$$

La solution générale de l'équation (27) est $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ où A et B sont des constantes arbitraires, alors que les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont définies par les formules (32) et (33).

Exemple 5. L'interaction de deux noyaux peut se décrire avec une bonne approximation à l'aide du potentiel des forces mésoniques $V = Ae^{-\alpha x}/x$ ($A < 0$ correspond à l'attraction). Trouver sous la forme d'une série la solution de l'équation d'onde de Schrödinger

$$y'' + k\left(E - \frac{Ae^{-\alpha x}}{x}\right) y = 0, \tag{34}$$

où α, A, E et $k = \frac{2m}{\hbar}$ sont des constantes (se limiter aux trois coefficients non nuls de la série corréspondant à la plus grande des racines de l'équation déterminante).

Solution. Cherchons la solution $y(x)$ de cette équation sous la forme de la série entière généralisée

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Les coefficients A_0 et B_0 de l'équation déterminante $\rho(\rho - 1) + A_0\rho + B_0 = 0$ seront égaux à

$$A_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = 0, \text{ car } p(x) \equiv 0,$$

$$B_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 k \left(E - \frac{Ae^{-\alpha x}}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} k(Ex^2 - Axe^{-\alpha x}) = 0,$$

si bien que cette équation prend la forme $\rho(\rho - 1) = 0$, d'où $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$.

Pour le cas où $\rho = 1$ la série entière généralisée est

$$y(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots; \tag{35}$$

alors

$$y' = c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2 + 4c_3 x^3 + \ldots,$$
$$y'' = 2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^3 + \ldots.$$

De plus, on a

$$e^{-\alpha x} = 1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} - \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} - \ldots.$$

Introduisons dans l'équation (14) les séries pour y'', y et $e^{-\alpha x}$, il vient

$$2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \left[kE - kA\left(\frac{1}{x} - \alpha + \frac{\alpha^2 x}{2!} - \frac{\alpha^3 x^2}{3!} + \ldots\right)\right] \times$$
$$\times (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \ldots) = 0.$$

Annulons les coefficients de toutes les puissances de x;

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2c_1 - kAc_0 = 0, \\ x^1 & 6c_2 + (kE + \alpha)c_0 - kAc_1 = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Des égalités obtenues, on trouve successivement

$$c_1 = \frac{Ak}{2} c_0, \quad c_2 = \frac{Akc_1 - (kE + \alpha A)c_0}{6}$$

ou

$$c_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{A^2k^2}{2} - kE - \alpha kA\right) c_0, \quad \text{etc.}$$

En introduisant dans la série (35) les valeurs trouvées des coefficients, on obtient

$$y(x) = c_0 x \left[1 + \frac{Ak}{2} x + \frac{1}{6}\left(\frac{A^2k^2}{2} - kE - \alpha kA\right) x^2 + \ldots\right],$$

où c_0 est une constante arbitraire.

Intégrer à l'aide de séries les équations différentielles suivantes :

739. $4xy'' + 2y' + y = 0$.

740. $(1 + x)\, y' - ny = 0$.

741. $9x\,(1 - x)\, y'' - 12y' + 4y = 0$.

742. Une analyse quantique de l'effet de Stark (en coordonnées parabolyques) conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\frac{1}{2}Ex + \alpha - \frac{m^2}{4x} - \frac{1}{4}Fx^2\right) y = 0,$$

où α, E, F, m sont des constantes. En utilisant la plus grande des racines de l'équation déterminante trouver la solution dans le voisinage du point $x = 0$ sous la forme d'une série (trouver les trois premiers coefficients).

743. Dans le cas où il n'y a pas de dépendance azimutale, la description d'un ion moléculaire de l'hydrogène conduit en mécanique quantique à l'équation

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)\, y'] + (\alpha + \beta x^2)\, y = 0,$$

où α, β sont des constantes. Trouver la solution de cette équation sous la forme d'une série (calculer les trois premiers coefficients non nuls du développement).

Exemple 6. Résoudre l'équation de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = 0, \qquad x > 0, \tag{36}$$

où p est une constante donnée.

Solution. Ecrivons (36) sous la forme

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0.$$

Ici, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$, si bien que

$$a_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = 1, \quad b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = -p^2$$

(v. formules (24)). L'équation déterminante pour ρ est:

$$\rho(\rho-1)+1\cdot\rho-p^2=0 \qquad \text{ou} \qquad \rho^2-p^2=0,$$

d'où $\rho_1=p$, $\rho_2=-p$.

Cherchons une première solution particulière de l'équation de Bessel (36) sous la forme de la série entière généralisée $y=$ $=x^p\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kx^k$. Introduisons y, y' et y'' dans l'équation (36), il vient

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+p)(k+p-1)x^{k+p-2}+$$

$$+x\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+p)x^{k+p-1}+(x^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+p}=0,$$

ou encore, après des transformations simples et la simplification par x^p,

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]C_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+2}=0.$$

D'où, en annulant les coefficients de toutes les puissances de x, on aura

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & (p^2-p^2)C_0=0, \\
x^1 & [(1+p)^2-p^2]C_1=0, \\
x^2 & [(2+p)^2-p^2]C_2+C_0=0, \\
x^3 & [(3+p)^2-p^2]C_3+C_1=0, \\
x^4 & [(4+p)^2-p^2]C_4+C_2=0, \\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^k & [(k+p)^2-p^2]C_k+C_{k-2}=0, \\
\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \tag{37}$$

La première des relations (37) est vérifiée pour toute valeur du coefficient C_0. De la deuxième relation (37) on obtient $C_1=0$, de la troisième $C_2=-\dfrac{C_0}{(2+p)^2-p^2}=-\dfrac{C_0}{2^2(1+p)}$, de la quatrième $C_3=0$, de la cinquième

$$C_4=-\frac{C_2}{(4+p)^2-p^2}=\frac{C_0}{2^4(1+p)(2+p)\cdot1\cdot2}.$$

Il est évident que tous les coefficients d'indices impairs sont nuls: $C_{2k+1}=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Les coefficients d'indices pairs sont de la forme

$$C_{2k}=\frac{(-1)^kC_0}{2^{2k}(p+1)(p+2)\ldots(p+k)\cdot k!}, \qquad k=1, 2, \ldots .$$

Pour simplifier les calculs ultérieures, posons

$$C_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \tag{38}$$

où $\Gamma(\nu)$ est fonction gamma d'Euler. La *fonction gamma* $\Gamma(\nu)$ d'Euler est déterminée pour toutes les valeurs positives (ainsi que pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) par la relation

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1}\, dx.$$

La fonction gamma possède les propriétés importantes suivantes:

1. $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$.
2. $\Gamma(1) = 1$.

Si k est un entier positif, alors

3. $\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k)\,\Gamma(\nu + 1)$.
4. $\Gamma(k + 1) = k!$

En utilisant (38) et les propriétés de la fonction gamma, écrivons le coefficient C_{2k} sous la forme

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(p+1)(p+2)\ldots(p+k)\cdot k!\cdot 2^p\Gamma(p+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\cdot k!\,\Gamma(p+k+1)},$$

puisque $(p + 1)(p + 2) \ldots (p + k)\,\Gamma(p + 1)$ est en vertu de la propriété (3), égale à $\Gamma(p + k + 1)$. Maintenant, la première solution particulière de l'équation de Bessel, que nous désignerons dans la suite par J_p prend la forme

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{39}$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Bessel de première espèce d'ordre p*.

Une deuxième solution particulière de l'équation de Bessel (36) sera cherchée sous la forme

$$y = x^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k,$$

où p est une deuxième racine de l'équation déterminante. Il est clair que cette solution peut être obtenue à partir de (39) en remplaçant p par $-p$ parce que l'équation (36) contient p à la puissance paire et ne change pas lors du remplacement de p par $-p$.

Ainsi, on a

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Bessel de première espèce d'ordre* $-p$.

Si p n'est pas égale à un entier, les solutions $J_p(x)$ et $J_{-p}(x)$ sont linéairement indépendantes parce que leurs développements en série commencent par des puissances différentes de x et, par conséquent, la combinaison linéaire $\alpha_1 J_p(x) + \alpha_2 J_{-p}(x)$ ne peut être identiquement nulle que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Si p est un entier, on peut établir une dépendance linéaire des fonctions $J_p(x)$ et $J_{-p}(x)$, à savoir il se trouve que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n \text{ est un entier}).$$

Ainsi, pour un p entier, au lieu de $J_{-p}(x)$ il faut chercher une autre solution qui soit linéairement indépendante de $J_p(x)$. A cet effet, introduisons une nouvelle fonction

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \tag{40}$$

en considérant d'abord que p est un nombre non entier.

Il est évident que la fonction $Y_p(x)$ ainsi définie est solution de l'équation (36) (parce qu'elle représente une combinaison linéaire de solutions particulières $J_p(x)$ et $J_{-p}(x)$).

En passant dans (40) à la limite lorsque p *tend vers un entier*, on obtient une solution particulière $Y_p(x)$ linéairement indépendante de $J_p(x)$ et déjà définie pour des valeurs entières de p.

La fonction $Y_p(x)$ introduite ci-dessus s'appelle *fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre* p. Ainsi pour tout p, fractionnel ou entier, nous avons construit un *système fondamental de solutions* de l'équation de Bessel (36). Il en résulte que la solution générale de l'équation (36) peut être représentée sous la forme

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x),$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

Dans le cas où p n'est pas un entier, la solution générale de l'équation de Bessel peut être représentée sous la forme

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Remarque 1. L'équation, que l'on rencontre bien souvent,

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)\,y = 0, \tag{41}$$

où k est une certaine constante ($k \neq 0$) peut se ramener à l'équation de Bessel

$$\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)\,y = 0 \tag{42}$$

par la substitution $\xi = kx$.

La solution générale de l'équation (42) (pour p non égal à un nombre entier) sera

$$y = C_1 J_p(\xi) + C_2 J_{-p}(\xi),$$

et la solution générale de l'équation (41) prendra la forme

$$y = C_1 J_p(kx) + C_2 J_{-p}(kx).$$

Pour p entier, on a $y = C_1 J_p(kx) + C_2 Y_p(kx)$.

Remarque 2. Une large classe d'équations de la forme

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + (b + cx^m)\, y = 0, \tag{43}$$

où a, b, c, m sont des constantes ($c > 0$, $m \neq 0$) se ramènent par introduction d'une nouvelle variable t et d'une nouvelle fonction u à l'aide des formules

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \qquad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}$$

à l'équation de Bessel

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + (t^2 - p^2)\, u = 0,$$

où

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{m}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}, \quad p^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}.$$

Pour $c = 0$ ou $m = 0$, l'équation (43) est une équation d'Euler.

Exemple 7. Ramener l'équation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + (x^4 - 12)\, y = 0 \tag{44}$$

à l'équation de Bessel et trouver sa solution générale.

Solution. Dans notre cas, les coefficients sont $a = -3$, $b = -12$, $c = 1$, $m = 4$, si bien que

$$\alpha = \frac{a-1}{2} = -2, \quad \beta = \frac{m}{2} = 2; \quad -\frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2},$$

$$\gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m} = \frac{1}{2}, \quad p^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2} = 4.$$

Introduisons une nouvelle variable indépendante t et une nouvelle fonction u à l'aide des formules

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \quad \text{ou} \quad y = 2ut, \quad \text{où} \quad u = u(t), \tag{45}$$

$$x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2t}\,; \tag{46}$$

alors, il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(2ut)}{\frac{dx}{dt}}=\sqrt{2t}\,\frac{d}{dt}(2ut)=2\sqrt{2}\left(t^{3/2}\frac{du}{dt}+t^{1/2}u\right).$$

De manière analogue, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4t^2\frac{d^2u}{dt^2}+10t\frac{du}{dt}+2u.$$

En introduisant dans (44) au lieu de x, y $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy^2}{dx^2}$ leurs expressions par t et u, on obtient l'équation de Bessel

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+(t^2-4)\,u=0,$$

dont la solution générale est

$$u=C_1J_2(t)+C_2Y_2(t).$$

En passant aux variables x et y d'après les formules $t=x^2/2$, $u=y/x^2$ qui sont obtenues à partir de (45) et (46), on trouve la solution générale de l'équation donnée

$$y=x^2\left[C_1J_2\left(\frac{x^2}{2}\right)+C_2Y_2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right].$$

Trouver les solutions générales des équations de Bessel suivantes :

744. $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)y=0.$

745. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$

746. $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{9}y=0.$

747. $y''+\frac{1}{x}y'+4y=0.$

748. $x^2y''-2xy'+4(x^4-1)\,y=0.$

749. $xy''+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{4}y=0.$

750. $y''+\frac{5}{x}y'+y=0.$

751. $y''+\frac{3}{x}y'+4y=0.$

3°. Recherche des solutions périodiques des équations différentielles linéaires. Soit donnée une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre à coefficients constants

$$y''+p_1y'+p_2y=f(x), \tag{47}$$

où $f(x)$ est une fonction périodique, de période 2π développable en série de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{48}$$

La solution périodique de l'équation (47) sera cherchée sous la forme

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx), \tag{49}$$

Introduisons la série (49) dans l'équation (47) et choisissons ses coefficients de manière que l'égalité (47) soit satisfaite formellement. Egalons les termes constants et les coefficients de $\cos nx$ et $\sin nx$ aux premiers et aux seconds membres de l'égalité obtenue, il vient

$$A_0=\frac{a_0}{p_2}; \quad A_n=\frac{(p_2-n^2)\,a_n-p_1nb_n}{(p_2-n^2)^2+p_1^2n^2};$$
$$B_n=\frac{(p_2-n^2)\,b_n+p_1na_n}{(p_2-n^2)^2+p_1^2n^2}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{50}$$

La première des égalités (50) donne la condition nécessaire d'existence de la solution de la forme (49): si $a_0\neq 0$ il faut que $p_2\neq 0$. En introduisant (50) dans (49), on obtient

$$y(x)=\frac{a_0}{2p_2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(p_2-n^2)\,a_n-p_1nb_n]\cos nx+[(p_2-n^2)\,b_n+p_1na_n]\sin nx}{(p_2-n^2)^2+p_1^2n^2}. \tag{51}$$

Lorsque $p_1=0$ et $p_2=n^2$, où $n=1, 2, \ldots$, la solution périodique n'existera que sous la condition

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=0. \tag{52}$$

Les coefficients A_k et B_k pour $k\neq n$ se déterminent par les formules (50), alors que les coefficients A_n et B_n restent arbitraires, car l'expression $A_n\cos nx+B_n\sin nx$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

Dans le cas où les conditions (52) ne sont pas satisfaites, l'équation (47) ne possède pas de solutions périodiques (il y a résonance). Pour $p_2=0$ et $a_0=0$, le coefficient A_0 reste indéterminé de sorte que l'équation (47) admet une infinité de solutions périodiques qui diffèrent l'une de l'autre par un terme constant.

Si le second membre $f(x)$ de l'équation (47) a la période $2l \neq 2\pi$, il convient de développer $f(x)$ suivant la période $2l$ et chercher la solution de l'équation (47) sous la forme

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right).$$

Dans ce cas les formules (50) changent respectivement.

Exemple 8. Trouver les solutions périodiques de l'équation

$$y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

Solution. On a $p_1 = 0$, $p_2 = 4 = 2^2$, $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 1/n^2$ ($n = 3, 4, \ldots$). La fonction

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

ne contient pas de terme résonnant $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ et par suite l'équation possède des solutions périodiques et même une infinité de ces solutions.

D'après les formules (50) on trouve les coefficients

$$A_0 = A_n = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_n = \frac{1}{n^2(4-n^2)}, \quad n = 3, 4, \ldots .$$

Toutes les solutions périodiques sont données par la formule

$$y(x) = A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2(n^2-4)},$$

où A_2 et B_2 sont des constantes arbitraires.

Exemple 9. Trouver les solutions périodiques de l'équation $y'' + y = \cos x$.

Solution. Dans le cas considéré on a $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. Vérifions si les conditions (52) sont satisfaites. On a

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi \neq 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = 0 \quad (\text{ici } n = 1).$$

Les conditions (6) d'existence de solution périodique ne sont pas satisfaites. Par conséquent, l'équation donnée n'a pas de solutions

périodiques. En effet, la solution générale de l'équation $y'' + y = \cos x$ est

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Il est évident qu'elle n'est pas périodique puisqu'elle comporte le terme $1/2x \sin x$.

Exemple 10. Trouver une solution périodique de l'équation $y'' - y = |\sin x|$.

Solution. La fonction $f(x) = |\sin x|$ est périodique, de période π. Son développement en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ est

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \quad (-\pi, \pi).$$

Cherchons la solution de cette équation sous la forme

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

On a

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -1; \quad a_0 = 4/\pi, \quad a_{2n-1} = 0,$$
$$a_{2n} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les formules (50) donnent

$$A_0 = -\frac{4}{\pi}, \quad A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{16n^2-1}, \quad B_n = 0.$$

Par conséquent, l'équation considérée a une solution périodique de la forme

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{16n^2-1}.$$

Trouver des solutions périodiques (si elles existent) des équations différentielles suivantes:

752. $y'' + 3y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{n^3}$.

753. $y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

754. $y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

755. $y'' + y = \cos x \cos 2x$.

756. $y'' + y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$.

757. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

758. $y'' - 4y' + 4y = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi$.

759. $y'' - 4y = |\cos \pi x|$.

760. $y'' - 4y' + 4y = \arcsin(\sin x)$.

761. $y'' + 9y = \sin^3 x$.

4°. **Intégration asymptotique.** Soit donnée une série (non nécessairement convergente)

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots . \tag{53}$$

Désignons par $S_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes de cette série.

On dira que la série (53) représente un *développement asymptotique* de la fonction $f(x)$ pour des valeurs suffisamment grandes de $|x|$ si l'expression

$$R_n(x) = x^n \{f(x) - S_n(x)\}$$

satisfait à la condition

$$\lim_{|x| \to \infty} R_n(x) = 0, \quad \text{ou} \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{54}$$

(n est un entier fixé quelconque), si même $\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = \infty$ (x est un nombre fixé). La circonstance que la série considérée est un développement asymptotique de la fonction $f(x)$ (série entière asymptotique) est désignée ainsi

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-n}.$$

Le sens du développement asymptotique est que la série (53) peut servir de source de formules approchées

$$f(x) \approx A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

si bien que la différence $f(x) - S_n(x) = \rho_n(x)$ pour $|x| \to \infty$ sera infiniment petite d'ordre supérieur à n, c'est-à-dire

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\rho_n(x)}{\frac{1}{|x|^n}} = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{|x| \to \infty} |x|^n \rho_n(x) = 0.$$

Exemple 11. Considérons la fonction

$$f(x)=\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{x-t}\,dt, \quad x>0. \tag{55}$$

En effectuant n fois l'intégration par parties, on obtient

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots-(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{x^n}+(-1)^n n!\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-1}}{t^{n+1}}\,dt.$$

Désignons $u_{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ et posons

$$S_n(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}=\sum_{m=0}^{n} u_m.$$

On a $\left|\frac{u_m}{u_{m-1}}\right|=\frac{m}{x}\to\infty$, $m\to\infty$, si bien que la série $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m$ sera divergente pour toutes les valeurs de x. Pourtant cette série peut être appliquée pour le calcul des valeurs de $f(x)$ pour de grandes valeurs de x. En effet, fixons une certaine valeur de n:

$$f(x)-S_n(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt,$$

d'où, puisque $e^{x-t}\leqslant 1$ $(t\geqslant x)$, on aura

$$|f(x)-S_n(x)|=(n+1)!\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt\leqslant(n+1)!\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{n+2}}=\frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{56}$$

Pour des valeurs suffisamment grandes de x, le second membre de cette inégalité peut être rendu aussi petit que l'on veut. C'est ainsi, par exemple, que pour $x\geqslant 2n$, on aura

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{1}{2^{n+1}n^2},$$

si bien que la valeur de la fonction $f(x)$ peut être calculée avec une précision élevée pour de grandes valeurs de x si l'on prend la somme d'un nombre convenable de termes de la série $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m$. De la majoration (56) il résulte que

$$R_n(x)=x^n\{f(x)-S_n(x)\}\to 0 \text{ pour } x\to\infty$$

pour tout n fixé, si bien que la série $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m$ donne le développement asymptotique de la fonction donnée $f(x)$.

Dans le cas où la condition (54) est satisfaite, on obtient de (54) pour les coefficients A_k de la série (53) l'expression suivante

$$A_0 = \lim_{x\to\infty} f(x), \quad A_n = \lim_{x\to\infty} x^n \{f(x) - S_{n-1}(x)\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Il en résulte que si la fonction $f(x)$ admet un développement asymptotique, celui-ci est unique.

Au contraire, une seule et même série de la forme (53) peut servir de développement asymptotique des fonctions différentes. Par exemple, pour la fonction

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty)$$

le développement asymptotique sera, en raison de (57), la série (53) dont tous les coefficients A_n sont nuls: $A_n = 0$ ($n = 0, 1, \ldots$). Il est évident que cette même série est aussi un développement asymptotique de la fonction $f(x) \equiv 0$. On dit qu'une série asymptotique représente non pas une seule fonction mais une classe de fonctions asymptotiquement égales.

Opérations sur les séries asymptotiques.

1). Si

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k}, \quad g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-k}, \tag{58}$$

alors

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \pm B_k)\, x^{-k}. \tag{59}$$

2). Si on a le développement asymptotique (58), le développement asymptotique de la fonction $f(x)\, g(x)$ peut être obtenu par une multiplication formelle des développements (58).

3). Si la fonction $f(x)$ admet un développement asymptotique

$$f(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}, \tag{60}$$

qui commence par le terme x^{-2}, on a le développement asymptotique

$$\int_x^{\infty} f(x)\, dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{A_k}{x^k}\, dx,$$

ou

$$\int_x^{\infty} f(x)\, dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{(k-1)\, x^{k-1}}, \tag{61}$$

ce qui signifie que le développement asymptotique (60) peut être formellement intégré par parties.

4). La dérivation formelle par parties d'un développement asymptotique est en général inadmissible.

En effet, considérons la fonction

$$f(x) = e^{-x} \sin e^{x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Son développement asymptotique est une série de coefficients $A_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, alors que la fonction dérivée $f'(x) = -e^{-x} \sin e^{x} + \cos e^{x}$ n'a pas de développement asymptotique, car $f'(x)$ n'a pas même de limite lorsque $x \to +\infty$.

Pourtant, si la fonction $f(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$ est dérivable et si la fonction $f'(x)$ peut être développée en une série asymptotique, alors

$$f'(x) \sim -\frac{A_1}{x^2} - \frac{2A_2}{x^3} - \frac{3A_3}{x^4} - \ldots$$

762. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots,$$

où $x > 0$ est réel.

763. Montrer que

$$e^{z} z^{-a} \int_z^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx \sim \frac{1}{z} + \frac{a-1}{z^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^3} + \ldots$$

pour de grandes valeurs positives de z.

764. Trouver le développement asymptotique de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} \sin e^{2x}, \quad 0 < x < \infty.$$

Montrer que la dérivée $f'(x)$ n'a pas de développement asymptotique.

Applications à l'intégration des équations différentielles

Exemple 12. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}. \tag{62}$$

La série

$$\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \ldots, \tag{63}$$

qui est divergente pour toutes les valeurs de x, satisfait formellement à l'équation donnée, ce qu'on établit sans difficulté par une vérification directe. L'équation (62) est vérifiée par la fonction *)

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{-1} e^{t}\, dt,$$

et l'intégrale au second membre converge pour $x < 0$. En intégrant une seconde fois par parties, on trouve

$$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{-1} e^{t}\, dt = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \rho_n,$$

où

$$\rho_n = (n+1)!\, e^{-x} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{n+2}}\, dt.$$

Pour $x < 0$, on a

$$|\rho_n| \leqslant (n+1)!\, e^{-x} \frac{1}{|x|^{n+2}} \int_{-\infty}^{x} e^t\, dt = \frac{(n+1)!}{|x|^{n+2}}.$$

Par conséquent, en prenant les n premiers termes de la série nous commettons une erreur inférieure au $(n+1)$-ième terme. Il est facile d'établir que dans ce cas

$$R_n(x) = x^n \{f(x) - S_n(x)\} = x^n \rho_n(x) \to 0 \text{ pour } x \to -\infty.$$

La série construite est donc asymptotique et peut être utilisée pour le calcul de l'intégrale, c'est-à-dire pour la résolution de l'équation (62).

Exemple 13. Si $J_\nu(x)$ est solution de l'équation de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0$, alors en substituant à J_ν la fonction $x^{-1/2}y(x)$ on constate que $y(x)$ vérifie l'équation

$$y'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) y = 0. \tag{64}$$

Pour de grandes valeurs de x ($x \gg \nu$) il est naturel de tenter de remplacer cette équation par l'équation

$$y_1'' + y_1 = 0 \tag{65}$$

---

*) La fonction définie par l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$ s'appelle *fonction intégrale exponentielle* et se note $Ei(x)$.

qui admet pour solution

$$y_1 = a_0 \sin x + b_0 \cos x.$$

On peut améliorer la précision (pour de grandes valeurs de x) en remplaçant les constantes a_0 et b_0 par le développement suivant les puissances négatives de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}.$$

Cela signifie que la solution de l'équation (64) peut être cherchée sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \cos x. \tag{66}$$

En introduisant l'expression (66) dans l'équation (64), on obtient

$$y(x) = \left[a_0 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} b_0 - \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{2(2x)^2} a_0 + \ldots \right] \times$$
$$\times \sin x + \left[b_0 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} a_0 - \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{2(2x)^2} b_0 + \ldots \right] \cos x. \tag{67}$$

On peut continuer ce processus. Il importe de remarquer que ces expressions conduisent à un résultat précis pour $\nu = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \ldots$ (v. fonctions de Bessel d'indice demi-entier). On dit que (65) est équation *limite* de (64) (l'équation (65) est obtenue à partir de (64) si, dans le coefficient de y, on effectue le passage à la limite pour $x \to +\infty$). La solution de l'équation (65) pour de grandes valeurs de x (surtout pour $\nu = \pm \frac{2k+1}{2}$) définit assez bien le comportement de la solution de l'équation initiale (65). ◆

Les exemples ci-dessous montrent que le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle ne peut pas se déduire toujours du comportement des solutions de l'équation limite.

Prenons la fonction

$$y(x) = x^{\alpha} \sin(x^{\beta} + C), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{68}$$

et établissons une équation différentielle pour laquelle $y(x)$ sera une solution. On a

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} \sin(x^{\beta} + C) + \beta x^{\alpha+\beta-1} \cos(x^{\beta} + C);$$
$$y'' = \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} - \frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}} \right] x^{\alpha} \sin(x^{\beta} + C) +$$
$$+ \beta(2\alpha + \beta - 1) x^{\alpha+\beta-2} \cos(x^{\beta} + C).$$

Exigeons que α et β soient liés par la relation

$$\beta(2\alpha + \beta - 1) = 0. \tag{69}$$

Alors, la fonction donnée $y(x)$ vérifiera l'équation différentielle

$$y'' + \left[\frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{x^2}\right] y = 0. \tag{70}$$

Supposons que $0 < \beta < 1$, par exemple $\beta = 1/2$. Alors de la condition (69) on trouve $\alpha = 1/4$ et la solution

$$y(x) = \sqrt[4]{x} \sin\left(\sqrt{x} + C\right) \tag{71}$$

de l'équation (70) pour $x \to +\infty$ sera oscillante. D'autre part, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{x^2}\right] = 0,$$

de sorte que l'équation limite correspondant à l'équation (70) sera

$$y'' = 0. \tag{72}$$

Sa solution générale

$$y = Ax + B \tag{73}$$

ne comporte pas de partie oscillante.

Ainsi, le comportement asymptotique de la solution (71) de l'équation différentielle (70) ne peut pas être prévu d'après le comportement de la solution (73) de l'équation limite (72).

Indiquons quelques résultats qui s'y rapportent. Soit donnée une équation différentielle

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0, \tag{74}$$

où

$$p_1(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

$$p_2(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x} + \ldots, \tag{75}$$

de sorte que

$$\lim_{x\to\infty} p_1(x) = a_0, \quad \lim_{x\to\infty} p_2(x) = b_0. \tag{76}$$

L'équation limite est dans ce cas de la forme

$$y'' + a_0 y' + b_0 y = 0, \tag{77}$$

c'est-à-dire une équation à coefficients constants. Soient λ_1, λ_2 les racines (pour simplifier nous les supposerons distinctes) de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0. \tag{78}$$

Les solutions de l'équation limite sont les fonctions exponentielles $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$.

Il se trouve que le comportement asymptotique des solutions de l'équation (74) est analogue non pas au comportement des combinaisons linéaires d'exponentielles $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ mais à celui des combinaisons linéaires de fonctions

$$e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1}, \quad e^{\lambda_2 x} x^{\sigma_2}, \tag{79}$$

où les exposants σ_1, σ_2 sont définis par les formules

$$\sigma_1 = -\frac{a_1\lambda_1 + b_1}{a_0 + 2\lambda_1}, \qquad \sigma_2 = -\frac{a_1\lambda_2 + b_1}{a_0 + 2\lambda_2}. \tag{80}$$

Les fonctions (79) dépendent non seulement de a_0 et b_0, c'est-à-dire non seulement des valeurs limites de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ pour $x \to +\infty$, mais aussi des coefficients a_1, b_1 intervenant aux seconds membres des égalités (75).

Théorème. *Si l'équation caractéristique* $\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0$ *a de racines distinctes* λ_1 *et* λ_2 *et si*

$$\sigma_1 = -\frac{a_1\lambda_1 + b_1}{2\lambda_1 + a_0}, \qquad \sigma_2 = -\frac{a_1\lambda_2 + b_1}{2\lambda_2 + a_0},$$

alors l'équation

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right) y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots\right) y = 0$$

possède des solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *qui sont représentables sous forme de séries asymptotiques*:

$$y_1(x) \sim e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1} \left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots\right),$$

$$y_2(x) \sim e^{\lambda_2 x} x^{\sigma_2} \left(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots\right). \tag{81}$$

Si les racines de l'équation caractéristique coïncident, alors un terme logarithmique peut apparaître. La solution $y_1(x)$ peut être représentée par une série asymptotique du type de la première série (81), alors que la deuxième solution $y_2(x)$ est maintenant représentable sous la forme d'une série

$$y_2(x) \sim A y_1(x) \ln x + e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1} \left(K_0 + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \dots\right). \tag{82}$$

Dans ces conditions, les coefficients A_i, B_i, K_i peuvent être déterminés par la méthode connue des coefficients indéterminés en introduisant les expressions (81) ou (82) dans l'équation et en annulant les coefficients des puissances $1/x$. Dans ce cas, la dérivation formelle des développements asymptotiques, dont la validité n'est pas claire à priori, conduit à des représentations asymptotiques correctes des fonctions cherchées.

765. Montrer que l'équation $y'' + \left(1 + \frac{\alpha}{2x^2}\right) y = 0$ a pour $x \to +\infty$ deux solutions de la forme

$$y_1(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cos x, \quad y_2(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin x.$$

766. Montrer que l'équation $y'' - \left(1 - \frac{\alpha}{2x^2}\right) y = 0$ a pour $x \to$ $\to +\infty$ deux solutions de la forme

$$y_1(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^x, \quad y_2(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-x}.$$

CHAPITRE III

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 19. Notions fondamentales et définitions

Un système d'équations différentielles ordinaires

$$F_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y^{(k_n)}) = 0 \tag{1}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé $y_1^{(k_1)}$, $y_2^{(k_2)}$, ..., $y_n^{(k_n)}$ s'appele *système canonique*. Il est de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots \\ \quad \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y^{(k_n-1)}), \\ y_2^{(k_2)} = f_2(x, y, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots \\ \quad \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(k_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots \\ \quad \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}). \end{array}\right. \tag{2}$$

On appelle *ordre du système* (1) le nombre p égal à

$$p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Exemple 1. Ramener à la forme canonique le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0, \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0. \end{array}\right.$$

Solution. Le système considéré est du troisième ordre car $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ et donc $p = 3$. En résolvant la première équation par rapport à y_1'' et la deuxième par rapport à y_2', on obtient le système canonique

$$y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}, \quad y_2' = \ln(y_1 + y_2). \ \blacklozenge$$

Un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

où t est une variable indépendante et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions inconnues de t, s'appelle *système normal.*

Le nombre n s'appelle *ordre du système normal* (3). On dit que deux systèmes d'équations différentielles sont *équivalents* s'ils possèdent mêmes solutions.

Tout système canonique (2) peut être ramené au système normal (3) équivalent et l'ordre de ces systèmes sera le même.

Exemple 2. Ramener au système normal le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \dfrac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

Solution. Posons $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, $y = x_3$. Alors on aura $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx_3}{dt}$ et le système donné sera ramené au système normal du troisième ordre suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{2x_1}{t^3}. \end{cases}$$

Exemple 3. Ramener l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0$$

au système normal.

Solution. Posons $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, alors $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx_2}{dt}$. En portant ces expressions dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{dx_2}{dt} + p(t)x_2 + q(t)x_1 = 0.$$

Le système normal sera de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)x_2 - q(t)x_1.$$

On appelle *solution du système* (3) dans l'intervalle (a, b) l'ensemble de n fonctions quelconques

$$x_1 = \varphi_1(t), \; x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$$

définies et continûment dérivables dans l'intervalle (a, b) si elles transforment les équations du système (3) en identités valables pour toutes les valeurs de $t \in (a, b)$.

Exemple 4. Montrer que le système de fonctions $x_1 = -1/t^2$. $x_2 = -t \ln t$ définies dans l'intervalle $0 < t < +\infty$ est solution du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} - 1.$$

Solution. On a $\frac{dx_1}{dt} = \frac{2}{t^3}$, $\frac{dx_2}{dt} = -1 - \ln t$. En introduisant dans l'équation du système donné au lieu de x_1, x_2, $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dx_2}{dt}$ leurs expressions par t, on obtient les identités

$$\frac{2}{t^3} \equiv \frac{2t}{t^4} \equiv \frac{2}{t^3}, \quad -\ln t - 1 \equiv -\ln t - 1, \quad 0 < t < +\infty.$$

Vérifier si les systèmes de fonctions donnés sont solutions des systèmes d'équations différentielles donnés:

767. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2 + t}{t}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{t^2}, \\ x_2 = t \ln t. \end{cases}$

768. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e^{t - x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2e^{x_1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2e^t. \end{cases}$

769. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^t. \end{cases}$

770. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = y - x; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$

Le *problème de Cauchy* pour le système (3) consiste à trouver des solutions

$$x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t), \; \ldots, \; x_n = x_n(t)$$

de ce système qui satisfont aux conditions initiales

$$x_1(t_0) = x_1^0, \; x_2(t_0) = x_2^0, \; \ldots, \; x_n(t_0) = x_n^0, \tag{4}$$

où t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 sont des nombres donnés.

Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. *Soit donné le système normal d'équations différentielles* (3) *et soient des fonctions* $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *définies dans un certain domaine* D *de dimensions* $n+1$ *dans lequel varient les variables* $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. *S'il existe un voisinage* Ω *du point* $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *dans lequel les fonctions* f_i *a) sont continues, b) possèdent des dérivées partielles bornées par rapport aux variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *alors il existe un intervalle* $t_0 - h < t < t_0 + h$ *de variation de* t *dans lequel le système normal* (3) *a une solution et une seule qui satisfait aux conditions initiales* (4).

Le système de n fonctions dérivables

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

de la variable indépendante t et de n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$ s'appelle *solution générale* du système normal (3) si: 1) pour toutes valeurs admissibles des $C_1, C_2, \ldots, C_n$ le système de fonctions (5) transforme les équations (3) en identités; 2) dans le domaine où sont satisfaites les conditions du théorème de Cauchy, la fonction (5) résout tout problème de Cauchy.

Exemple 5. Montrer que le système de fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases} \tag{6}$$

est la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1. \end{cases} \tag{7}$$

Solution. Dans l'exemple considéré le domaine D est

$$-\infty < t < +\infty, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \tag{8}$$

En introduisant les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définies par (6) dans le système d'équations (7) on obtient des identités en t qui sont valables pour toutes les valeurs des constantes C_1 et C_2. Ainsi, la condition 1) qui définit la solution générale est satisfaite.

Vérifions la réalisation de la condition 2). Remarquons que pour le système d'équations (7) les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy sont satisfaites dans tout le domaine D défini par les relations (8). Aussi pour les conditions initiales peut-on prendre tout triplet de nombres t_0, x_1^0, x_2^0. Alors les relations (6) donnent, pour déterminer C_1 et C_2, le système

$$\begin{cases} x_1^0 = C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{3t_0}, \\ x_1^0 = 2C_1 e^{-t_0} - 2C_2 e^{3t_0}. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système $\Delta = -4e^{2t_0} \neq 0$; par conséquent, ce système est univoquement résoluble par rapport à C_1 et C_2 quels que soient x_1^0, x_2^0 et t_0. Cela équivaut à dire que tout problème de Cauchy est résoluble. Ainsi le système de fonctions (6) est la solution générale du système d'équations (7). ◆

Les solutions obtenues à partir de la solution générale pour des valeurs concrètes des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ s'appelent *solutions particulières.*

Exemple 6. Connaissant la solution générale (6) du système (7), trouver une solution particulière de ce système qui satisfait aux conditions initiales $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -4$.

Solution. Le problème se ramène à la recherche des valeurs des constantes C_1 et C_2 qui vérifient les relations

$$0 = C_1 + C_2, \quad -4 = 2C_1 - 2C_2.$$

En résolvant ce système, on trouve $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. La solution particulière cherchée est

$$x_1(t) = -e^{-t} + e^{3t}, \quad x_2(t) = -2e^{-t} - 2e^{3t}.$$

Remarques. 1. Il y a des systèmes d'équations différentielles qu'on ne peut pas réduire à une seule équation. Par exemple, le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \end{cases}$$

se répartit en deux équations indépendantes. La solution générale s'obtient dans ce cas par l'intégration de chaque équation séparément :

$$x_1 = C_1e^{-t}, \quad x_2 = C_2e^{t}.$$

2. Si le nombre d'équations du système est égal à n et le nombre de fonctions inconnues est N, tel que $N > n$, un tel système est *indéterminé.* Dans ce cas on peut choisir arbitrairement $N - n$ fonctions cherchées (pourvu qu'elles soient dérivables un nombre de fois nécessaire) et définir les autres n fonctions à partir d'elles.

3. Si le système comporte n équations et le nombre de fonctions cherchées est N, tel que $N < n$, ce système peut s'avérer *incompatible*, c'est-à-dire n'admettant aucune solution. ◆

Soit donné le système normal de deux équations différentielles (pour simplifier)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2). \end{cases}$$

Nous allons considérer le système de valeurs de t, x_1, x_2 comme coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point dans l'espace à trois dimensions rapporté au système de coordonnées Otx_1x_2. La solution

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

qui prend pour $t = t_0$ la valeur x_1^0, x_2^0 représente dans cet espace une certaine ligne passant par le point $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$. Cette ligne s'appelle *courbe* (*ligne*) *intégrale* du système normal (9).

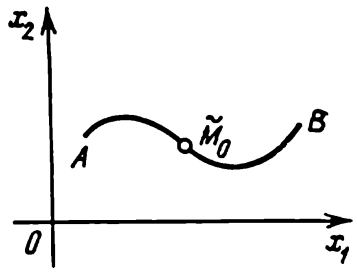

Fig. 28

Le problème de Cauchy pour le système (9) permet alors un énoncé géométrique suivant : dans l'espace de variables (t, x_1, x_2) trouver une courbe intégrale qui passe par le point donné (t_0, x_1^0, x_2^0). Le théorème de Cauchy établit l'existence et l'unicité d'une telle courbe.

On peut donner encore une interprétation du système normal (9) et de sa solution. Considérons la variable indépendante t comme temps et le système de valeurs des fonctions x_1, x_2 comme coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point du plan x_1Ox_2. Ce plan de variables x_1Ox_2 s'appelle *plan de phase*. Dans le plan de phase la solution

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

du système (9), qui prend pour $t = t_0$ les valeurs initiales x_1^0, x_2^0, est représentée par la ligne AB (fig. 28) passant par le point $M_0(x_1^0, x_2^0)$. Cette ligne s'appelle *trajectoire* (*de phase*) du système. Il est évident que la trajectoire du système (9) est la projection de la courbe intégrale sur le plan de phase.

Le système (9) définit à tout instant de temps t, au point donné (x_1, x_2) du plan de phase, les coordonnées de la vitesse $\{f_1, f_2\}$ de déplacement du point.

Exemple 7. Résoudre le système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \tag{10}$$

pour les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{11}$$

Solution. En dérivant une fois par rapport à t la première équation de système (10) et en introduisant $\frac{dy}{dt} = -x$ dans l'équation obtenue, on ramène le système (10) à une seule équation du deuxième ordre $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ dont la solution générale est

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Puisque $y = \frac{dx}{dt}$, on a $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$; si bien que la solution générale du système (10) est

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \tag{12}$$

Une solution particulière du système (10) qui satisfait aux conditions initiales (11) sera

$$x = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \; y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \tag{13}$$

En éliminant t entre les équations (13) (en élevant au carré et en additionnant membre à membre) on obtient la trajectoire de phase

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{14}$$

où $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. C'est une circonférence passant par le point $M_0(x_0, y_0)$. En mettant l'équation (13) sous la forme

$$\begin{aligned} x &= R \sin(t + \alpha), \\ y &= R \cos(t + \alpha). \end{aligned} \tag{15}$$

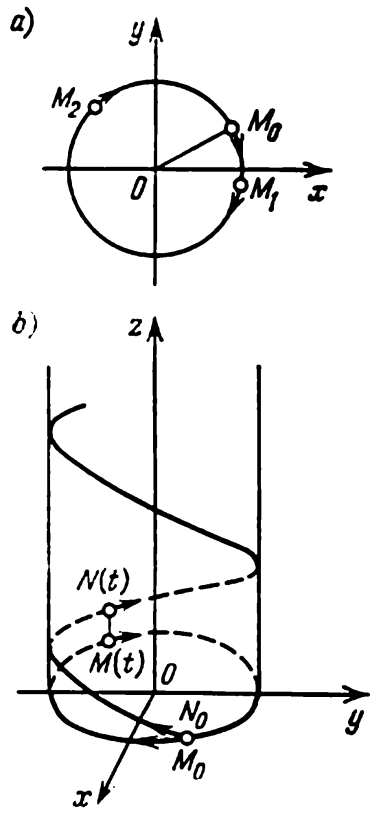

Fig. 29

où $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\sin \alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = y_0/R$, on remarque que l'équation (15) exprime la variation en fonction du temps des coordonnées courantes du point $M(x(t), y(t))$ ou tout simplement de $M(t)$ qui commence son mouvement à l'instant pour $t = 0$ depuis le point $M_0(x_0, y_0)$ et se déplace suivant la circonférence (14) (fig. 29, *a*).

Le sens de mouvement du point $M(t)$ sera défini à l'aide du système donné (10). Pour $x > 0$, en vertu de l'équation $\frac{dy}{dt} = -x$, la valeur de y décroît (comme, par exemple, au point $M_1(t)$) alors que pour $x < 0$ la valeur de y croît (comme par exemple au point $M_2(t)$). Ainsi, le point $M(t)$ se déplace sur la courbe (14) dans le sens des aiguilles d'une montre. En faisant varier arbitrairement les conditions initiales (11) (en restant toutefois dans des limites physiquement admissibles), c'est-à-dire en modifiant arbitrairement la position du point initial $M_0(x_0, y_0)$, on obtient toutes les trajectoires de phase possibles (14).

Donnons maintenant une autre interprétation des équations (15) (ou, ce qui revient au même, des équations (13)). Dans l'espace à trois dimensions, prenons un système de coordonnées cartésiennes

à droite $Oxyz$. On se rend compte sans peine que le point $N(x(t), y(t), z(t))$ (ou, en abrégé, le point $N(t)$) de coordonnées (fig. 29, *b*)

$$x(t) = R\sin(t+\alpha), \quad y(t) = R\cos(t+\alpha), \quad z(t) = t \qquad (16)$$

commence son mouvement à l'instant $t = 0$ depuis le point initial $N_0(x_0, y_0, 0)$ et, avec l'augmentation de t, monte suivant une ligne en spirale (16) placée sur le cylindre (14) de génératrice parallèle à l'axe Oz.

Il est évident que le point N_0 coïncide avec le point M_0 et que pour tout t le point $N(t)$ est projeté en le point $M(t)$ sur la trajectoire de phase. Le point $M(t)$ se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre, la courbe intégrale décrite par le point $N(t)$ est une ligne hélicoïdale gauche sur le cylindre (14). Pour les différentes positions du point $N_0(x_0, y_0, 0)$, les courbes intégrales du système (10) correspondant aux différentes valeurs de $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ sont projetées sur le plan xOy en les courbes différentes (14), alors que les courbes intégrales correspondant à une seule et même valeur de R sont projetées en une seule et même courbe (14). ◆

On appelle *intégrale du système normal* (3) une fonction $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie et continue avec ses dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ dans le domaine D si, lorsqu'on y porte une solution arbitraire $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ du système (3), cette fonction prend une valeur constante, c'est-à-dire une fonction $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui dépend uniquement du choix de la solution $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ et non de la variable t.

On appelle *intégrale première du système normal* (3) l'égalité

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C,$$

où $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'intégrale du système (3) et C une constante arbitraire *).

Exemple 8. Montrer que la fonction

$$\psi(t, x_1, x_2) = \frac{x_2}{t} - x_1, \qquad (17)$$

définie dans le domaine $D: t \neq 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty$ est intégrale du système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{x_1}{t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \frac{x_2}{t}, \end{aligned} \qquad (18)$$

*) Parfois on appelle intégrale première du système (3) l'intégrale de ce système.

si la solution générale de ce système est

$$x_1 = C_1 t, \; x_2 = C_1 t^2 + C_2 t. \tag{19}$$

Solution. En introduisant (19) dans (17), on obtient

$$\psi(t, x_1, x_2) = \psi(t, C_1 t, C_1 t^2 + C_2 t) = \frac{C_1 t^2 + C_2 t}{t} - C_1 t = C_2$$

dans le domaine D. Par suite, la fonction (17) est dans le domaine D l'intégrale du système d'équation (18) et, par conséquent, une intégrale première de ce système sera $\frac{x_2}{t} - x_1 = C$, où C est une constante arbitraire.

Théorème. *Pour qu'une fonction* $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *soit intégrale du système* (3) *il faut et il suffit que les conditions*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 \tag{20}$$

soient satisfaites dans le domaine D.

Exemple 9. Montrer que la fonction

$$\psi(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - t \tag{21}$$

est l'intégrale du système d'équations

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{22}$$

Solution. Dans ce cas

$$f_1(t, x_1, x_2,) = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{23}$$

Cherchons les dérivées partielles de la fonction $\psi(t, x_1, x_2)$. On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{24}$$

En introduisant (23) et (24) dans le premier membre de (20), on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f_1(t, x_1, x_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2(t, x_1, x_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} =$$

$$= -1 + \frac{x_1^2}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = -1 + 1 = 0$$

dans le domaine D: $-\infty < t < +\infty$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.

Ainsi, la fonction (21) est l'intégrale du système d'équations (22), et, par suite, l'intégrale première du système (22) sera

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - t = C,$$

où C est une constante arbitraire. ◆

Le système normal (3) a une infinité de systèmes d'intégrales premières.

Les intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ du système (3) s'appellent *intégrales indépendantes par rapport aux fonctions cherchées* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ne sont reliées par une relation de la forme $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ pour aucun choix de la fonction F qui ne dépend pas explicitement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Théorème. *Pour que les fonctions* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *possédant des dérivées partielles* $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ *soient indépendantes par rapport à* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *dans un certain domaine* D, *il faut et il suffit que le jacobien de ces fonctions soit différent de zéro dans le domaine* D,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

On appelle *intégrale générale du système normal* (3) l'ensemble de n intégrales premières indépendantes de ce système.

Si l'on connaît k intégrales premières indépendantes du système (3), $k < n$, l'ordre de ce système peut être abaissé de k unités.

Vérifier si les fonctions données ψ sont des intégrales premières des systèmes donnés d'équations différentielles :

771. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1; \end{cases} \quad \psi = x_1 x_2 e^{-t}.$

772. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-x}}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t} e^{-y}; \end{cases} \quad \psi = (1+x) e^{-x} - e^{-y}.$

773. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y+t}{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{x+y}; \end{cases}$ a) $\psi_1 = x + y - t$, b) $\psi_2 = x + y + t$.

Pour les systèmes d'équations différentielles qui suivent, vérifier si les couples de fonctions donnés forment les systèmes d'intégrales premières indépendantes :

774. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-y}{y-x}, & x+y+t=C_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{y-x}; & x^2+y^2+t^2=C_2. \end{cases}$$

775. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+y}{x-y}, & \dfrac{x-y}{t-x}=C_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+x}{x+y}; & \dfrac{t-x}{t-y}=C_2. \end{cases}$$

§ 20. Méthode des éliminations successives (réduction d'un système d'équations différentielles à une seule équation)

Un cas particulier d'un système canonique d'équations différentielles est une seule équation d'ordre n résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$

Par introduction de nouvelles fonctions

$$x_1 = x'(t),\ x_2 = x''(t),\ \ldots,\ x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

cette équation se remplace par un système normal de n équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}). \end{cases}$$

On peut également affirmer la réciproque, à savoir que dans le cas général le système normal de n équations du premier ordre

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

est équivalent à une seule équation d'ordre n. C'est la base de l'une des méthodes d'intégration des systèmes d'équations différentielles appelée *méthode des éliminations successives.*

Illustrons cette méthode sur l'exemple de système de deux équations

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+f(t), \quad \frac{dy}{dt}=cx+dy+g(t), \tag{1}$$

Ici a, b, c, d sont des coefficients constants et $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions données; $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions cherchées. De la première équation du système (1) on trouve

$$y=\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right). \tag{2}$$

En introduisant dans la deuxième équation du système le second membre de (2) au lieu de y et la dérivée du second membre de (2) au lieu de $\frac{dy}{dt}$, on obtient une équation du second ordre par rapport à $x(t)$:

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx+P(t)=0,$$

où A, B, C sont des constantes. On en déduit que $x=x(t, C_1, C_2)$. En introduisant les expressions obtenues pour x et $\frac{dx}{dt}$ dans (2), on trouve y.

Exemple 1. Intégrer le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+1, \\ \frac{dy}{dt}=x+1. \end{cases} \tag{3}$$

Solution. De la première équation du système (3) on trouve $y = \frac{dx}{dt}-1$, alors

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4}$$

En introduisant (4) dans la deuxième équation du système (3), on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x-1=0. \tag{5}$$

La solution générale de l'équation (5) est

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}-1. \tag{6}$$

En calculant la dérivée de (6) par rapport à t, on trouve

$$y = \frac{dx}{dt} - 1 = C_2 e^t + C_2 e^{-t} - 1.$$

La solution générale du système (3) est

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

Exemple 2. Résoudre le problème de Cauchy pour le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \tag{7}$$

$$x(0) = 6, \; y(0) = -2. \tag{8}$$

Solution. De la deuxième équation du système (7) on trouve

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{9}$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{10}$$

En introduisant (9) et (10) dans la première équation du système (7), on obtient l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$ dont la solution générale

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{11}$$

En portant (11) dans (9), on trouve

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}.$$

La solution générale du système (7) est

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}, \; y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{12}$$

Pour les conditions initiales (8) et (12), on obtient le système d'équations permettant de déterminer C_1 et C_2:

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$$

dont la résolution donne $C_1 = -1$, $C_2 = -1$. En portant ces valeurs de C_1 et C_2 dans (12), on obtient la solution du problème de Cauchy posé

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad y = -e^t - e^{-t}.$$

Exemple 3. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = -x + yt, \\ t^2\dfrac{dy}{dt} = -2x + yt. \end{cases}$$

Solution. De la première équation du système, on tire

$$y=\frac{x}{t}+\frac{dx}{dt},$$

si bien que

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{t^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}.$$

En introduisant ces expressions de y et $\frac{dy}{dt}$ dans la deuxième équation, on obtient

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-x=-2x+x+t\frac{dx}{dt}, \quad \text{ou} \quad t^2\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

En posant $t\neq 0$, on tire de la dernière équation $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ et après l'intégration on obtient $x=C_1+C_2t$. On trouve maintenant sans peine que

$$y=\frac{x}{t}+\frac{dx}{dt}=\frac{C_1+C_2t}{t}+C_2=2C_2+\frac{C_1}{t}.$$

La solution générale du système donné est

$$x=C_1+C_2t, \quad y=\frac{C_1}{t}+2C_2, \quad t\neq 0.$$

En appliquant la méthode des éliminations successives, résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :

776. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-9y, \\ \frac{dy}{dt}=x. \end{cases}$

777. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+t, \\ \frac{dy}{dt}=x-t. \end{cases}$

778. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+3x+4y=0, \\ \frac{dy}{dt}+2x+5y=0, \ x(0)=1, \ y(0)=4. \end{cases}$

779. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x+5y, \\ \frac{dy}{dt}=-x-3y, \ x(0)=-2, \ y(0)=1. \end{cases}$

780. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t, \\ \frac{dy}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$

781. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}$

782. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

783. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

784. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

785. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x. \end{cases}$

786. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x\dfrac{dx}{dt} + x, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

§ 21. Recherche de combinaisons intégrables. Forme symétrique d'un système d'équations différentielles

1°. Recherche de combinaisons intégrables. Cette méthode d'intégration d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

peut se résumer de la façon suivante : à l'aide des opérations arithmétiques convenables (addition, soustraction, multiplication, addition) on forme à partir des équations du système (1) des combinaisons dites intégrables, c'est-à-dire des équations assez faciles à résoudre de la forme

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

où u est une certaine fonction des fonctions cherchées $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_n(t)$. Chaque combinaison intégrable fournit une seule intégrale première. Si on a trouvé n intégrales premières du système (1), son intégration est achevée ; dans le cas où on n'a obtenu que m intégrales premières indépendantes, $m < n$, le système (1) se ramène à un système comportant un plus petit nombre de fonctions inconnues.

Exemple 1. Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)\,t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1x_2t. \end{cases} \tag{2}$$

Solution. En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt}=(x_1+x_2)^2\,2t,$$

d'où

$$-\frac{1}{x_1+x_2}=t^2-C_1, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x_1+x_2}+t^2=C_1.$$

En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première, on trouve

$$\frac{d(x_1-x_2)}{dt}=2t\,(x_1-x_2)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{x_1-x_2}+t^2=C_1.$$

Ainsi, on a obtenu deux intégrales premières du système donné

$$\psi_1(t, x_1, x_2)=t^2+\frac{1}{x_1+x_2}=C_1,$$

$$\psi_2(t, x_1, x_2)=t^2+\frac{1}{x_1-x_2}=C_2,$$

qui sont indépendantes parce que le jacobien est différent de zéro :

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} \\ -\frac{1}{(x_1-x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1-x_2)^2} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{(x_1^2-x_2^2)^2}\neq 0.$$

L'intégrale générale du système (2) est

$$t^2+\frac{1}{x_1+x_2}=C_1, \quad t^2+\frac{1}{x_1-x_2}=C_2. \tag{3}$$

La résolution du système (3) par rapport aux fonctions inconnues donne la solution générale du système (2) :

$$x_1=\frac{C_1+C_2-2t^2}{2(C_1-t^2)(C_2-t^2)}, \quad x_2=\frac{C_2-C_1}{2(C_1-t^2)(C_2-t^2)}.$$

Exemple 2. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=\frac{x_1-x_2}{x_3-t}, \\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{x_1-x_2}{x_3-t}, \\ \frac{dx_3}{dt}=x_1-x_2+1. \end{cases} \tag{4}$$

Solution. En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première, on obtient $\frac{d(x_1-x_2)}{dt}$, d'où l'on tire une intégrale première du système (4)

$$x_1 - x_2 = C_1. \tag{5}$$

En reportant (5) dans les deuxième et troisième équations du système (4), on obtient un système à deux fonctions inconnues

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1. \end{cases} \tag{6}$$

De la deuxième équation du système (6) on déduit

$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2. \tag{7}$$

Introduisant (7) dans la première équation du système (6), on obtient

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}, \quad x_2 = \ln |C_1 t + C_2| + C_3;$$

ainsi,

$$x_1 - x_2 = C_1, \quad x_2 = \ln |C_1 t + C_2| + C_3,$$
$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2.$$

On en tire la solution générale du système (4):

$$x_1 = \ln |C_1 t + C_2| + C_1 + C_3, \quad x_2 = \ln |C_1 t + C_2| + C_3,$$
$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2.$$

Exemple 3. Trouver une solution particulière du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x - t}, \end{cases}$$

qui satisfait aux conditions initiales $x|_{t=0} = 1$, $y|_{t=0} = 1$.

Solution. Ecrivons ce système sous la forme

$$\begin{cases} y\left(\frac{dx}{dt} - 1\right) = -1, \\ (x-t)\frac{dy}{dt} = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y\frac{d(x-t)}{dt} = -1 \\ (x-t)\frac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Additionnons membre à membre les dernières équations, il vient

$$y\frac{d(x-t)}{dt} + (x-t)\frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}[(x-t)\,y] = 0.$$

On en trouve l'intégrale première $(x - t)\, y = C_1$. Puisque $x - t = C_1/y$, la deuxième équation du système prend la forme $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{C_1}$, d'où $y = C_2 e^{t/C_1}$. Ainsi,

$$(x - t)\, y = C_1, \quad y = C_2 e^{t/C_1}.$$

On en déduit la solution générale

$$x = t + \frac{C_1}{C_2} e^{-t/C_1}, \quad y = C_2 e^{t/C_1}.$$

En posant $t = 0$ dans ces égalités, on trouve $1 = C_1/C_2$, $1 = C_2$, c'est-à-dire $C_1 = C_2 = 1$, si bien que la solution particulière cherchée sera

$$x = t + e^{-t}, \; y = e^{t}.$$

Exemple 4 (décomposition d'une substance). Une substance A se décompose en deux substances X et Y, la vitesse de formation de chacune de ces dernières étant proportionnelle à la quantité de la substance non décomposée. Etablir la loi de variation des quantités x et y des substances X et Y en fonction du temps t, si pour $t = 0$ on a $x = y = 0$ et, au bout d'une heure, $x = a/8$, $y = 3a/8$, où a est la quantité initiale de la substance A.

Solution. A l'instant t, la quantité de la substance A non décomposée est égale à $a - x - y$. D'après les hypothèses du problème on a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 (a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2 (a - x - y). \end{cases} \tag{8}$$

En divisant membre à membre la deuxième équation par la première, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{k_2}{k_1} x + C_1.$$

Pour $t = 0$ on a $x = y = 0$, si bien que de la dernière équation on tire $C_1 = 0$ et donc

$$y = \frac{k_2}{k_1} x. \tag{9}$$

En reportant (9) dans la première équation du système, on obtient l'équation

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)\, x = k_1 a,$$

dont la solution générale est

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

En utilisant la condition initiale $x|_{t=0}=0$, on trouve $C_2=-\frac{k_1 a}{k_1+k_2}$, de sorte que

$$x=\frac{k_1 a}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)t}\right]. \tag{10}$$

Introduisons (10) dans (9), il vient

$$y=\frac{k_2 a}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)t}\right]. \tag{10'}$$

Pour déterminer les coefficients k_1 et k_2, prenons pour unité de temps une heure. Puisque par hypothèse $x=\frac{a}{8}$ et $y=\frac{3}{8}\,a$ pour $t=1$, on déduit de (10) et (10') que

$$\frac{k_1}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right]=\frac{1}{8},\quad \frac{k_2}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right]=\frac{3}{8},$$

d'où

$$k_2=3k_1,\ k_1+k_2=\ln 2,$$

si bien que $k_1=\frac{\ln 2}{4}$, $k_2=\frac{3}{4}\ln 2$ et la solution cherchée du système (8) est

$$x=\frac{a}{4}(1-2^{-t}),\quad y=\frac{3a}{4}(1-2^{-t}).$$

Exemple 5. (Equilibre des gaz dans des vases communicants). Soient deux vases de volumes respectifs V_1 et V_2 contenant un gaz. A l'instant initial, la pression du gaz est P_1 dans le premier vase et P_2 dans le second. Les vases sont mis en communication au moyen d'un tube par lequel le gaz s'écoule d'un vase dans l'autre. En supposant que la quantité de gaz s'écoulant en une seconde est proportionnelle à la différence de carrés des pressions, déterminer les pressions p_1 et p_2 du gaz dans les vases à l'instant t.

Solution. Soit a la quantité de gaz passant par unité de temps pour une différence de pressions égale à l'unité. Alors, la quantité de gaz passant pendant un temps dt d'un vase dans l'autre est égale à $a(p_1^2-p_2^2)\,dt$. Cette quantité est égale à la diminution du gaz pendant le temps dt dans l'un des vases et à son augmentation, pendant le même temps, dans l'autre. On peut donc écrire le système d'équations

$$\begin{cases} a(p_1^2-p_2^2)=bV_2\dfrac{dp_2}{dt}, \\ a(p_1^2-p_2^2)=-bV_1\dfrac{dp_1}{dt}, \end{cases} \tag{11}$$

où b est un coefficient constant.

Retranchons membre à membre les équations du système (11), il vient

$$V_1 \frac{dp_1}{dt} + V_2 \frac{dp_2}{dt} = 0,$$

d'où

$$V_1 p_1 + V_2 p_2 = C_1. \tag{12}$$

Multiplions les deux membres de la première équation du système (11) par $p_1 V_1$ et les deux membres de la deuxième équation par $p_2 V_2$ et additionnons-les membre à membre, il vient

$$a(p_1^2 - p_2^2)(p_1 V_1 + p_2 V_2) = bV_1 V_2 \left(p_1 \frac{dp_2}{dt} - p_2 \frac{dp_1}{dt}\right). \tag{13}$$

En tenant compte de (12) et en divisiant les deux membres de (13) par p_1^2, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right] k,$$

où $k = \frac{aC_1}{bV_1 V_2}$. En notant $p_2/p_1 = z$, on obtient

$$\frac{dz}{1-z^2} = k\,dt, \quad \text{d'où} \quad \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 2kt + \ln C_2$$

ou

$$\frac{1+z}{1-z} = C_2 e^{2kt}. \tag{14}$$

En introduisant dans (14) la quantité p_2/p_1 au lieu de z, on obtient

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = C_2 e^{2kt}. \tag{15}$$

A l'instant initial $t = 0$ on a $p_1 = P_1$, $p_2 = P_2$, si bien que de l'équation (12) il résulte

$$C_1 = P_1 V_1 + P_2 V_2, \tag{16}$$

alors que l'équation (15) donne

$$C_2 = \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2}, \tag{17}$$

En partant des équations (12) et (15), on trouve les pressions cherchées $p_1(t)$ et $p_2(t)$ à tout instant t, les constantes C_1 et C_2 étant déterminées par les formules (16) et (17).

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :

787. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y}. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos x \sin y. \end{cases}$

792. $\begin{cases} e^t \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ e^t \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2} \sin 2x \sin 2y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

2°. Forme symétrique d'un système d'équations différentielles. Parfois pour rechercher les combinaisons intégrables lors de la résolution du système d'équations différentielles (1) il est commode de le mettre sous une forme symétrique

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \\ = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \tag{18}$$

Dans un système d'équations différentielles écrit sous forme symétrique les variables t, x_1, x_2, . . ., x_n sont équivalentes, ce qui permet dans certains cas de simplifier la recherche des combinaisons intégrables.

Pour résoudre le système (18) on prend des paires de rapports admettant la séparation des variables ou bien on utilise des proportions dérivées

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_m}{b_m} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m}, \tag{19}$$

où λ_1, λ_2, . . ., λ_m sont des coefficients quelconques choisis de façon que le numérateur soit la différentielle du dénominateur ou bien que le numérateur soit une différentielle totale et le dénominateur soit nul.

Exemple 6. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}. \tag{20}$$

Solution. Une première combinaison intégrable est $\frac{dt}{2x} = -\frac{dx}{\ln t}$. En séparant les variables et en intégrant, on obtient une intégrale première

$$t(\ln t - 1) + x^2 = C_1. \tag{21}$$

Une deuxième combinaison intégrable s'obtient en utilisant les proportions dérivées (19). A cet effet, additionnons les numérateurs et les dénominateurs des fractions du système (20), il vient

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{dt + dx + dy}{0},$$

ici, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. D'où l'on déduit que $dt + dx + dy = 0$ ou $d(t + x + y) = 0$ et donc

$$t + x + y = C_2. \tag{22}$$

Les intégrales premières (21) et (22) fournissent l'intégrale générale du système (20)

$$x^2 + t(\ln t - 1) = C_1, \quad x + y + t = C_2,$$

à partir de laquelle on trouve la solution générale du système

$$x = \pm\sqrt{C_1 + t(\ln t - 1)}, \qquad y = C_2 - t \mp \sqrt{C_1 + t(\ln t - 1)}.$$

Exemple 7. Résoudre le système d'équations

$$\frac{dt}{4y - 5x} = \frac{dx}{5t - 3y} = \frac{dy}{3x - 4t}. \tag{23}$$

Solution. En multipliant dans le système (23) les nominateurs et les dénominateurs des fractions respectivement par 3, 4, 5 et en additionnant les numérateurs et les dénominateurs, on obtient en raison de (19)

$$\frac{3\,dt}{12y - 15x} = \frac{4\,dx}{20t - 12y} = \frac{5\,dy}{15x - 20t} = \frac{3\,dt + 4\,dx + 5\,dy}{0}$$

(ici, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$). On en tire: $3dt + 4dx + 5dy = 0$ ou $d(3t + 4x + 5y) = 0$ et donc $3t + 4x + 5y = C_1$ est une intégrale première du système (23).

Puis, en multipliant dans le système (23) les numérateurs et les dénominateurs des fractions respectivement par $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = 2x$, $\lambda_3 = 2y$ et en additionnant les numérateurs et les dénominateurs, on obtient en raison de (19)

$$\frac{2t\,dt}{8yt - 10xt} = \frac{2x\,dx}{10tx - 6yx} = \frac{2y\,dy}{6xy - 8ty} = \frac{2t\,dt + 2x\,dx + 2y\,dy}{0};$$

d'où

$$2t\,dt + 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \text{ ou } d(t^2 + x^2 + y^2) = 0,$$

et donc, une deuxième intégrale première sera $t^2 + x^2 + y^2 = C_2$.

L'ensemble des intégrales premières, qui sont indépendantes, donne l'intégrale générale du système (23):

$$3t + 4x + 5y = C_1, \quad t^2 + x^2 + y^2 = C_2,$$

Le système (23) est donc résolu.

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants:

794. $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{ty}$.

795. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{yt} = \frac{dy}{xt}$.

796. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}$.

797. $\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{-yt} = \frac{dt}{xy}$.

798. $\frac{dt}{t^2-x^2-y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}$.

799. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{3t-4y}{2y-3x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{4x-2t}{2y-3x}. \end{cases}$

800. $\begin{cases} t\,dx = (t-2x)\,dt, \\ t\,dy = (tx+ty+2x-t)\,dt. \end{cases}$

801. $\frac{t\,dt}{x^2-2xy-y^2} = \frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{x-y}$.

§ 22. Intégration des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants. Méthode d'Euler

On appelle *système linéaire homogène* à coefficients constants un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

où a_{ik} sont des coefficients constants et $x_k(t)$ est la fonction inconnue de t.

Le système (1) peut s'écrire en abrégé sous forme d'une seule équation matricielle

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{2}$$

où

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

La matrice unicolonne

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

s'appelle *solution particulière* de l'équation (2) dans l'intervalle (a, b), si l'on a l'identité

$$\frac{dY}{dt}=AY(t) \text{ pour } a<t<b.$$

Le système de solutions particulières

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad X_2(t)=\begin{pmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \dots, X_n(t)=\begin{pmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

(ici, dans la notation x_i^k l'indice inférieur indique le numéro de la solution et l'indice supérieur le numéro de la fonction dans la solution) est dit *fondamental* sur l'intervalle (a, b) si son wronskien

$$W(t)=W(X_1, X_2 \dots, X_n)=\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t)\, x_2^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t)\, x_2^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t)\, x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pour tout $t \in (a, b)$.

Théorème. *Si le système de solutions particulières de l'équation homogène* (2) *est fondamental, la solution générale de cette équation est de la forme*

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \dots + C_nX_n(t),$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ *sont des constantes arbitraires.*

L'intégration des systèmes linéaires peut s'obtenir par divers procédés examinés plus haut, par exemple par la méthode des élimi-

nations successives, par la recherche de combinaisons intégrables, etc.

Pour intégrer des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants on applique aussi la *méthode d'Euler*.

Illustrons cette méthode sur l'exemple du système de trois équations différentielles linéaires:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z. \end{cases} \tag{3}$$

Cherchons la solution du système (3) sous la forme

$$x = \lambda e^{rt},\ y = \mu e^{rt},\ z = \nu e^{rt},\ \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ et } r \text{ — const.} \tag{4}$$

En introduisant (4) dans (3) et en simplifiant par e^{rt}, on obtient un système d'équations permettant de déterminer λ, μ et ν:

$$\begin{cases} (a-r)\lambda + b\mu + c\nu = 0, \\ a_1\lambda + (b_1-r)\mu + c_1\nu = 0, \\ a_2\lambda + b_2\mu + (c_2-r)\nu = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Le système (5) admet une solution non nulle lorsque son déterminant Δ est nul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1-r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-r \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

L'équation (6) est dite *caractéristique*.

A. Supposons que les racines r_1, r_2 et r_3 de l'équation caractéristique soient réelles et distinctes. Substituant dans (5) pour r le nombre r_1 et en résolvant le système (5), on obtient des nombres λ_1, μ_1 et ν_1. Puis, en posant dans (5) $r = r_2$, on obtient des nombres λ_2, μ_2 et ν_2 et, enfin, pour $r = r_3$, on obtient λ_3, μ_3, ν_3. Conformément à ces trois collections de nombres λ, μ et ν, on obtient trois solutions particulières

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 e^{r_1t}, & y_1 &= \mu_1 e^{r_1t}, & z_1 &= \nu_1 e^{r_1t}, \\ x_2 &= \lambda_2 e^{r_2t}, & y_2 &= \mu_2 e^{r_2t}, & z_2 &= \nu_2 e^{r_2t}, \\ x_3 &= \lambda_3 e^{r_3t}, & y_3 &= \mu_3 e^{r_3t}, & z_3 &= \nu_3 e^{r_3t}, \end{aligned}$$

La solution générale du système (3) est de la forme

$$\begin{aligned} x &= C_1\lambda_1 e^{r_1t} + C_2\lambda_2 e^{r_2t} + C_3\lambda_3 e^{r_3t}, \\ y &= C_1\mu_1 e^{r_1t} + C_2\mu_2 e^{r_2t} + C_3\mu_3 e^{r_3t}, \\ z &= C_1\nu_1 e^{r_1t} + C_2\nu_2 e^{r_2t} + C_3\nu_3 e^{r_3t}. \end{aligned}$$

Exemple 1. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

Solution. Etablissons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$.

Aux racines $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$ correspondent des nombres

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = -1; \\ \lambda_2 = 1, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 1; \\ \lambda_3 = 1, & \mu_3 = -2, & \nu_3 = 1. \end{array}$$

Ecrivons des solutions particulières

$$\begin{array}{lll} x_1 = e^{2t}, & y_1 = 0, & z_1 = -e^{2t}, \\ x_2 = e^{3t}, & y_2 = e^{3t}, & z_2 = e^{3t}, \\ x_3 = e^{6t}, & y_3 = -2e^{6t}, & z_3 = e^{6t}. \end{array}$$

La solution générale du système est

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y &= C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{aligned}$$

B. Considérons maintenant le cas où les racines de l'équation caractéristique sont complexes.

Exemple 2. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \tag{7}$$

Solution. Ecrivons le système pour la détermination de λ et μ:

$$\begin{cases} (1-r)\lambda - 5\mu = 0, \\ 2\lambda - (1+r)\mu = 0. \end{cases} \tag{8}$$

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

a pour racines $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$. En portant $r_1 = 3i$ dans (8), on obtient pour déterminer λ_1 et μ_1 deux équations:

$$(1 - 3i)\lambda_1 - 5\mu_1 = 0, \qquad 2\lambda_1 - (1 + 3i)\mu_1 = 0,$$

dont l'une est une conséquence de l'autre (du fait que le déterminant du système (8) est nul).

Prenons $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 1 - 3i$, alors une première solution particulière s'écrira sous la forme

$$x_1 = 5e^{3it}, \qquad y_1 = (1 - 3i)\,e^{3it}. \tag{9}$$

De façon analogue, en introduisant dans (8) la racine $r_2 = -3i$, on trouve une deuxième solution particulière

$$x_2 = 5e^{-3it}, \qquad y_2 = (1 + 3i)\,e^{-3it}. \tag{10}$$

Passons au nouveau système fondamental de solutions, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \tilde{x}_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2i}, \\ \tilde{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2}, & \tilde{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i}. \end{aligned} \tag{11}$$

En appliquant la formule d'Euler bien connue $e^{\pm\alpha it} = \cos\alpha t \pm$ $\pm\, i \sin\alpha t$, on déduit de (9), (10) et (11)

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 5\cos 3t, & \tilde{x}_2 &= 5\sin 3t, \\ \tilde{y}_1 &= \cos 3t + 3\sin 3t, & \tilde{y}_2 &= \sin 3t - 3\cos 3t. \end{aligned}$$

La solution générale du système (7) sera

$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t,$$

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t).$$

Remarque. Ayant trouvé une première solution particulière (9), on aurait pu écrire tout de suite la solution générale du système (7) en utilisant les formules

$$x = C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1, \quad y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1,$$

où $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z, c'est-à-dire si $z = a + bi$, alors $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

C. Cas des racines multiples.

Exemple 3. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases} \tag{12}$$

Solution. L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad r^2 - 6r + 9 = 0$$

a une racine multiple $r_1 = r_2 = 3$.

On cherchera une solution de la forme

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)\, e^{3t}, \quad y = (\lambda_2 + \mu_2 t)\, e^{3t}. \tag{13}$$

En introduisant (13) dans la première équation du système (12), on obtient

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \tag{14}$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de t aux premier et second membres de (14), on trouve

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2,$$

d'où

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1, \qquad \mu_2 = \mu_1. \tag{15}$$

Les quantités λ_1 et μ_1 restent arbitraires. En les désignant respectivement par C_1 et C_2, on obtient la solution générale

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{3t}, \qquad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{3t}.$$

Remarque. On vérifiera aisément qu'en portant (13) dans la deuxième équation du système (12), on obtiendra le même résultat (15). En effet, de l'égalité

$$\mu_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2 t) = 4(\lambda_2 + \mu_2 t) - (\lambda_1 + \mu_1 t)$$

on tire deux relations permettant d'exprimer λ_2 et μ_2 par λ_1 et μ_1 :

$$\mu_2 + 3\lambda_2 = 4\lambda_2 - \lambda_1,$$
$$3\mu_2 = 4\mu_2 - \mu_1,$$

d'où $\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_2$, $\mu_2 = \mu_1$.

Exemple 4. Résoudre le problème de Cauchy pour le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases} \tag{16}$$

avec les conditions initiales $x(0) = -4$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -r & 8 & 0 \\ 0 & -r & -2 \\ 2 & 8 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (r+2)(r^2+16)=0. \tag{17}$$

Les racines de l'équation (17) sont: $r_1 = -2$, $r_2 = 4i$, $r_3 = -4i$. A la racine réelle $r_1 = -2$ correspond une solution particulière

$$x_1 = \lambda_1 e^{-2t}, \qquad y_1 = \mu_1 e^{-2t}, \qquad z_1 = \nu_1 e^{-2t}. \tag{18}$$

En introduisant (18) dans le système (16) et en simplifiant par e^{-2t}, il vient

$$-2\lambda_1 = 8\mu_1, \qquad -2\mu_1 = -2\nu_1, \qquad -2\nu_1 = 2\lambda_1 + 8\mu_1 - 2\nu_1,$$

d'où $\lambda_1 = -4\mu_1$, $\nu_1 = \mu_1$. Posons par exemple $\mu_1 = 1$, alors $\lambda_1 = -4$, $\nu_1 = 1$ et la solution particulière (18) devient

$$x_1 = -4e^{-2t}, \qquad y_1 = e^{-2t}, \qquad z_1 = e^{-2t}. \tag{19}$$

A la racine complexe $r_2 = 4i$ correspond une solution

$$x_2 = \lambda_2 e^{4it}, \qquad y_2 = \mu_2 e^{4it}, \qquad z_2 = \nu_2 e^{4it}.$$

En l'introduisant dans (16) et en simplifiant par e^{4it}, il vient

$$4i\lambda_2 = 8\mu_2, \qquad 4i\mu_2 = -2\nu_2, \qquad 4i\nu_2 = 2\lambda_2 + 8\mu_2 - 2\nu_2,$$

d'où $\lambda_2 = -2i\mu_2$, $\nu_2 = -2i\mu_2$ si bien que pour $\mu_2 = i$, par exemple, on a $\lambda_2 = 2$, $\nu_2 = 2$ et la solution particulière devient

$$x_2 = 2e^{4it}, \qquad y_2 = ie^{4it}, \qquad z_2 = 2e^{4it}. \tag{20}$$

A la racine $r_3 = -4i$ correspond une solution complexe conjuguée de la solution (20), c'est-à-dire

$$x_3 = 2e^{-4it}, \qquad y_3 = -ie^{-4it}, \qquad z_3 = 2e^{-4it}. \tag{21}$$

En tenant compte de (19), (20) et (21), on obtient la solution générale

$$\begin{aligned} x &= -4C_1e^{-2t} + 2C_2e^{4it} + 2C_3e^{-4it}, \\ y &= C_1e^{-2t} + C_2ie^{4it} - C_3ie^{-4it}, \\ z &= C_1e^{-2t} + 2C_2e^{4it} + 2C_3e^{-4it}. \end{aligned} \tag{22}$$

Enfin, cherchons une solution qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = -4$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

De (22) on a pour $t = 0$:

$$\begin{cases} -4 = -4C_1 + 2C_2 + 2C_3, \\ 0 = C_1 + C_2 i - C_3 i, \\ 1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3, \end{cases}$$

d'où $C_1 = 1$, $C_2 = i/2$, $C_3 = -i/2$; ainsi,

$$x = -4e^{-2t} + ie^{4it} - ie^{-4it},$$
$$y = e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{4it} - \frac{1}{2}e^{-4it},$$
$$z = e^{-2t} + ie^{4it} - ie^{-4it}.$$

En utilisant les formules d'Euler $e^{\pm\alpha it} = \cos\alpha t \pm i \sin\alpha t$, il vient en définitive,

$$x = -4e^{-2t} - 2\sin 4t, \quad y = e^{-2t} - \cos 4t, \quad z = e^{-2t} - 2\sin 4t.$$

En appliquant la méthode d'Euler, trouver la solution générale des systèmes qui suivent et dégager, là où il est indiqué, une solution satisfaisant aux conditions initiales imposées:

802. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

803. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$

804. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

805. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y. \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

806. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

807. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$

808. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

809. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2z - 2x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

§ 23. Méthodes d'intégration des systèmes linéaires non homogènes à coefficients constants

Soit un système linéaire non homogène à coefficients constants

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t) + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

qui peut s'écrire de manière abrégée sous forme matricielle

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

où F est une matrice unicolonne dont les éléments sont des fonctions $f_i(t)$.

Théorème. *La solution générale $X(t)$ d'un système linéaire non homogène est égale à la somme de la solution générale $X_{g.h}(t)$ du système homogène associé $\frac{dX}{dt} = AX$ et de toute solution particulière $X_{p.n}(t)$ du système non homogène donné:*

$$X(t) = X_{g.h}(t) + X_{p.n}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t) + X_{p.n}(t),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Considérons quelques-unes des méthodes d'intégration des systèmes linéaires non homogènes.

1°. Méthode de variation des constantes arbitraires (méthode de Lagrange). Illustrons cette méthode sur l'exemple de système de trois équations non homogènes. Soit donné le système

$$\begin{cases} x' + a_1 x + b_1 y + e_1 z = f_1(t), & (1,1) \\ y' + a_2 x + b_2 y + e_2 z = f_2(t), & (1)\ (1,2) \\ z' + a_3 x + b_3 y + e_3 z = f_3(t). & (1,3) \end{cases}$$

Nous supposerons que la solution générale du système homogène associé est déjà trouvée

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3. \end{aligned} \tag{2}$$

On cherchera pour le système (1) une solution de la forme

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)\, x_1 + C_2(t)\, x_2 + C_3(t)\, x_3, \\ y &= C_1(t)\, y_1 + C_2(t)\, y_2 + C_3(t)\, y_3, \\ z &= C_1(t)\, z_1 + C_2(t)\, z_2 + C_3(t)\, z_3, \end{aligned} \tag{3}$$

où $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ sont des fonctions inconnues pour le moment.

Introduisons (3) dans (1) : l'équation (1,1) deviendra

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_1(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + e_1z_1) + \\ + C_2(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + e_1z_2) + \\ + C_3(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + e_1z_3) = f_1(t). \tag{4}$$

Toutes les sommes entre les parenthèses s'annuleront (du fait que (2) est solution du système homogène associé) si bien qu'on aura

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t). \tag{5}$$

D'une manière analogue, en introduisant (3) dans (1,2) et (1,3) on en déduit que

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 &= f_2(t), \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 &= f_3(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Le système d'équations (5), (6) linéaires en C_1', C_2', C_3' admet une solution car son déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

du fait que les solutions particulières du système homogène associé sont linéairement indépendantes. Après avoir déterminé $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_3'(t)$ on obtient, par intégration, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ et donc la solution (3) du système non homogène (1).

Exemple 1. En appliquant la méthode de variation des constantes, résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{7}$$

Solution. Résolvons d'abord le système homogène associé

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases} \tag{8}$$

De la deuxième équation du système (8) on tire

$$x = y - \frac{dy}{dt}, \text{ et donc } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Introduisons ces expressions de x et $\dfrac{dx}{dt}$ dans la première équation du système (8), il vient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0;$$

et la solution générale de cette équation est

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Comme $x = y - \frac{dy}{dt}$, on a

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}.$$

La solution générale du système homogène (8) est

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Cherchons pour le système non homogène (7) une solution de la forme

$$x = -C_1(t)\, e^{2t} + 4C_2(t)\, e^{-3t}, \quad y = C_1(t)\, e^{2t} + C_2(t)\, e^{-3t}. \quad (9)$$

En portant (9) dans (7) et en réduisant tous les termes semblables, on obtient

$$\begin{cases} -C_1'(t)\, e^{2t} + 4C_2'(t)\, e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)\, e^{2t} + C_2'(t)\, e^{-3t} = \frac{3}{2} t^2, \end{cases}$$

d'où

$$C_1'(t) = \frac{(6t^2 - 4t - 1)\, e^{-2t}}{5}, \quad C_2'(t) = \frac{(3t^2 + 8t + 2)\, e^{3t}}{10}.$$

Intégrons, il vient

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{5}(t + 3t^2)\, e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) &= \frac{1}{10}(2t + t^2)\, e^{3t} + C_2, \end{aligned} \quad (10)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Introduisant (10) dans (9), on obtient la solution générale du système (7)

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2} t^2.$$

En appliquant la méthode de variation des constantes arbitraires, trouver la solution générale des systèmes linéaires non homogènes suivants :

810. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$

811. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2. \end{cases}$

812. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{tg} t - x. \end{cases}$

813. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

814. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

2°. Méthode des coefficients indéterminés (méthode de sélection). Cette méthode est utilisée pour la résolution d'un système non homogène d'équations linéaires dans le cas où les fonctions $f_i(t)$ figurant aux seconds membres des équations ont une forme spéciale: les polynômes $P_k(t)$, les fonctions exponentielles $e^{\alpha t}$, les sinus et les cosinus $\sin \beta t$, $\cos \beta t$ et les produits de ces fonctions. Illustrons cette méthode sur quelques exemples.

Exemple 2. Trouver la solution générale du système non homogène

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases} \tag{11}$$

Solution. Cherchons d'abord la solution générale du système homogène associé

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases} \tag{12}$$

L'équation caractéristique est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. A la racine $\lambda_1 = 2$ correspond une solution particulière du système

$$x_1 = \mu_1 e^{2t}, \quad y_1 = \nu_1 e^{2t}.$$

En introduisant ces valeurs de x_1 et y_1 dans (12), on obtient un système d'équations pour déterminer μ_1 et ν_1:

$$-\mu_1 - 2\nu_1 = 0, \quad \mu_1 + 2\nu_1 = 0.$$

On en tire, par exemple, $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = -1$, si bien qu'une première solution particulière du système homogène (11) est

$$x_1 = 2e^{2t}, \quad y_1 = -e^{2t}.$$

Une solution particulière correspondant à la racine $\lambda_2 = 3$ est

$$x_2 = \mu_2 e^{3t}, \quad y_2 = \nu_2 e^{3t}.$$

Les nombres μ_2 et ν_2 se déterminent du système

$$\begin{cases} -2\mu_2 - 2\nu_2 = 0, \\ \mu_2 + \nu_2 = 0, \end{cases}$$

qui est vérifié par exemple par les nombres $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = -1$. Alors, une deuxième solution particulière du système (12) est

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = -e^{3t}.$$

La solution générale du système homogène (12) est :

$$\tilde{x} = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad \tilde{y} = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}.$$

En se servant de la méthode des coefficients indéterminés, on cherche une solution particulière du système non homogène (11). En partant de la forme des seconds membres $f_1(t) = e^t$ et $f_2(t) = e^{2t}$, écrivons la forme de la solution particulière (v. tableau 1)

$$x_{\text{p.n}} = Ke^t + (Lt + M)\, e^{2t}, \quad y_{\text{p.n}} = Ne^t + (Pt + Q)\, e^{2t}. \tag{13}$$

En introduisant (13) dans (11), on aura

$$Ke^t + 2(Lt + M)\, e^{2t} + Le^{2t} = Ke^t + (Lt + M)\, e^{2t} - 2Ne^t - \\ - 2(Pt + Q)\, e^{2t} + e^t,$$

$$Ne^t + 2(Pt + Q)\, e^{2t} + Pe^{2t} = Ke^t + (Lt + M)\, e^{2t} + 4Ne^t + \\ + 4(Pt + Q)\, e^{2t} + e^{2t}.$$

En égalant les coefficients de e^t, e^{2t} et te^{2t} dans les deux membres de ces identités, on obtient de la première :

$$\begin{array}{r|l} e^t & K = K - 2N + 1, \\ e^{2t} & 2M + L = M - 2Q, \\ te^{2t} & 2L = L - 2P, \end{array}$$

et de la deuxième :

$$\begin{array}{r|l} e^t & N = K + 4N, \\ e^{2t} & 2Q + P = M + 4Q + 1, \\ te^{2t} & 2P = L + 4P. \end{array}$$

La résolution de ce système d'équations donne : $K = -3/2$, $L = 2$, $M = 0$, $N = 1/2$, $P = -1$, $Q = -1$.

Par suite, la solution particulière (13) est de la forme

$$x_{\text{p. n}} = -\frac{3}{2} e^t + 2te^{2t}, \quad y_{\text{p. n}} = \frac{1}{2} e^t - (t + 1)\, e^{2t}.$$

La solution générale du système non homogène est

$$x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \frac{3}{2}e^t + 2te^{2t},$$

$$y = -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}.$$

Exemple 3. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases} \tag{14}$$

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Ses racines sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. La solution générale du système homogène associé est

$$\tilde{x} = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}, \quad \tilde{y} = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Cherchons une solution particulière du système non homogène (14) en tenant compte du fait que $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = -5\sin t$. Ecrivons $x_{p.n}$ et $y_{p.n}$ sous la forme

$$x_{p.n} = A\cos t + B\sin t, \quad y_{p.n} = M\cos t + N\sin t$$

et portons dans le système (14), il vient

$$-A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2M\cos t + 2N\sin t.$$

$$-M\sin t + N\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t.$$

En identifiant les coefficients de $\sin t$ et $\cos t$ dans les deux membres des égalités, il vient

$$\begin{cases} -A = B + 2N, \\ B = A + 2M, \\ -M = B - 5, \\ N = A, \end{cases}$$

d'où $A = -1$, $B = 3$, $M = 2$, $N = -1$ si bien que

$$x_{p.n} = -\cos t + 3\sin t, \quad y_{p.n} = 2\cos t - \sin t.$$

La solution générale du système initial est

$$x = \tilde{x} + x_{p.n} = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - \cos t + 3\sin t,$$

$$y = \tilde{y} + y_{p.n} = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 2\cos t - \sin t.$$

Exemple 4. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases} \tag{15}$$

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Ses racines sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. La solution générale du système homogène associé au système (15) est

$$\tilde{x} = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}, \quad \tilde{y} = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t}.$$

Cherchons pour le système non homogène (15) une solution particulière de la forme

$$x_{\text{p. n}} = (At + B)\,e^t, \quad y_{\text{p. n}} = (Mt + N)\,e^t. \tag{16}$$

Introduisons (16) dans (15) et simplifions par e^t, il vient

$$At + B + A = At + B + 2Mt + 2N + 16t,$$
$$Mt + N + M = 2At + 2B - 2Mt - 2N,$$

d'où $A = -12$, $B = -13$, $M = -8$, $N = -6$; donc,

$$x_{\text{p. n}} = -(12t + 13)\,e^t, \quad y_{\text{p. n}} = -(8t + 6)\,e^t.$$

La solution générale du système initial est

$$x = \tilde{x} + x_{\text{p. n}} = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t + 13)\,e^t,$$
$$y = \tilde{y} + y_{\text{p. n}} = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t + 6)\,e^t. \ \blacklozenge$$

Intégrer les systèmes d'équations linéaires non homogènes à coefficients constants :

815. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x. \end{cases}$

816. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t. \end{cases}$

817. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos t. \end{cases}$

818. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^t. \end{cases}$

819. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + e^t, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

821. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} - x = t. \end{cases}$ 822. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t. \end{cases}$

823. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z + 2 - t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z + 1 - t. \end{cases}$

824. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 2y = 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + y + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dt} + z = 1, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$

3°. Recherche des combinaisons intégrables (méthode de D'Alembert). Cette méthode sert à la construction de combinaisons intégrables lors de la résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants. Montrons son application à la résolution du système de deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t). \end{cases} \tag{17}$$

Multiplions la deuxième équation par un certain nombre λ et additionnons-la membre à membre à la première équation, il vient

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)\, x + (b_1 + \lambda b_2)\, y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Mettons cette dernière équation sous la forme

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)\left(x + \frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2}\, y\right) + f_1(t) + \lambda f_2(t). \tag{18}$$

Donnons au nombre λ une valeur telle que

$$\frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} = \lambda. \tag{19}$$

Alors, l'équation (18) se ramène à une équation linéaire en $x + \lambda y$

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)(x + \lambda y) + f_1(t) + \lambda f_2(t),$$

dont l'intégration donne

$$x + \lambda y = e^{(a_1+\lambda a_2)t}\left\{C + \int [f_1(t) + \lambda f_2(t)]\, e^{-(a_1+\lambda a_2)t}\, dt\right\}. \qquad (20)$$

Si l'équation (19) a des racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, on tirera de (20) deux intégrales premières du système (17) et donc l'intégration de ce système sera achevée.

Exemple 5. Résoudre par la méthode de D'Alembert le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y + 1. \end{cases} \qquad (21)$$

Solution. Choisissons λ d'après la formule (19): $4 + 5\lambda = \lambda(5 + 4\lambda)$, d'où $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Alors, suivant la formule (20) on a pour le cas où $\lambda = 1$:

$$x + y = e^{(5+4\cdot 1)t}\left\{C_1 + \int (e^t + 1)\, e^{-(5+4\cdot 1)t}\, dt\right\} =$$

$$= e^{9t}\left\{C_1 + \int (e^{-8t} + e^{-9t})\, dt\right\} = C_1 e^{9t} - \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{9}.$$

D'une manière analogue, on obtient pour $\lambda = -1$:

$$x - y = e^{(5-4)t}\left\{C_2 + \int (e^t - 1)\, e^{-(5-4)t}\, dt\right\} = C_2 e^t + te^t + 1.$$

Ainsi, on a deux intégrales premières indépendantes du système (21):

$$\left(x + y + \frac{1}{8} e^t + \frac{1}{9}\right) e^{-9t} = C_1, \quad (x - y - te^t - 1)\, e^{-t} = C_2.$$

L'intégration du système est achevée.

Remarque. Si les seconds membres du système normal d'équations sont de la forme $\dfrac{ax + by + cz + P(t)}{t}$, où a, b, c sont des constantes et $P(t)$ un polynôme en t, la substitution $t = e^\tau$ nous ramène à un système à coefficients constants.

Exemple 6. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y + t, \\ t\dfrac{dy}{dt} = -x - 5y + t^2. \end{cases}$$

Solution. Effectuons le changement de variable $t = e^{\tau}$. Il vient

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{d\tau}; \quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{d\tau}$$

et le système prend la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=-2x+2y+e^{\tau}, \\ \dfrac{dy}{d\tau}=-x-5y+e^{2\tau}. \end{cases} \tag{22}$$

Pour résoudre le système (22), appliquons la méthode de D'Alembert. Multiplions la deuxième équation du système par λ et additionnons-la membre à membre à la première, il vient

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)\,x+(2-5\lambda)\,y+e^{\tau}+\lambda e^{2\tau}$$

ou

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)\left[x+\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}\,y\right]+e^{\tau}+\lambda e^{2\tau}. \tag{22}$$

Choisissons λ de manière que le coefficient de y entre crochets soit égal à λ, c'est-à-dire $\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}=\lambda$, ou $\lambda^2-3\lambda+2=0$, d'où $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Pour $\lambda_1=1$, de (23) on tire

$$\frac{d\,(x+y)}{d\tau}=-3\,(x+y)+e^{\tau}+e^{2\tau},$$

d'où, suivant la formule (20), on a

$$x+y=e^{-3\tau}\left[C_1+\int(e^{\tau}+e^{2\tau})\,e^{3\tau}\,d\tau\right].$$

Intégrons, il vient

$$x+y=C_1e^{-3\tau}+\frac{1}{4}e^{\tau}+\frac{1}{5}e^{2\tau}. \tag{24}$$

D'une manière analogue, pour $\lambda_2=2$, on tire de (23)

$$x+2y=C_2e^{-4\tau}+\frac{1}{5}e^{\tau}+\frac{1}{3}e^{2\tau}. \tag{25}$$

En résolvant le système (24)-(25) par rapport à x et y, on obtient la solution générale du système (22) :

$$x=2C_1e^{-3\tau}-C_2e^{-4\tau}+0{,}3e^{\tau}+\frac{1}{15}e^{2\tau},$$

$$y=-C_1e^{-3\tau}+C_2e^{-4\tau}-0{,}05e^{\tau}+\frac{2}{15}e^{2\tau}.$$

En revenant à la variable t ($e^{\tau} = t$), on trouve la solution générale du système donné

$$x = \frac{2C_1}{t^3} - \frac{C_2}{t^4} + \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15},$$
$$y = -\frac{C_1}{t^3} + \frac{C_2}{t^4} - \frac{t}{20} + \frac{2t^2}{15}.$$

Résoudre par la méthode de D'Alembert les systèmes d'équations suivants :

825. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

826. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

827. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

828. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - e^t. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

§ 24. Application de la transformation de Laplace à la résolution des équations et systèmes différentiels linéaires

1°. Généralités sur la transformation de Laplace.

Original et transformée. On appelle la *fonction originale* ou tout simplement l'*original* une fonction à valeurs complexes $f(t)$ de la variable réelle t qui satisfait aux conditions suivantes : 1) $f(t) = 0$ si $t < 0$;

2) $f(t)$ est intégrable sur tout intervalle fini de l'axe des t ;

3) lorsque t augmente, le module de la fonction $f(t)$ ne croît pas plus rapidement qu'une certaine fonction exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $M > 0$ et $s_0 \geqslant 0$ tels que pour tout t l'on ait

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}. \tag{1}$$

On appelle l'*image* ou la *transformée* de Laplace de $f(t)$ une fonction $F(p)$ de la variable complexe $p = s + i\sigma$ définie par l'égalité

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{2}$$

pour $\operatorname{Re} p > s_0$. La condition 3) assure l'existence de l'intégrale (2).

La transformation (2) qui fait correspondre à la fonction originale $f(t)$ son image $F(p)$ s'appelle *transformation de Laplace*. On la note $f(t) \doteqdot F(p)$.

Propriétés de la transformation de Laplace. Dans ce qui suit, on suppose partout que

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad g(t) \doteqdot G(p). \tag{3}$$

I. *Propriété de linéarité. Quelles que soient deux constantes complexes* α *et* β,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{4}$$

II. *Théorème d'homothétie. Quel que soit* $\alpha > 0$ *constant,*

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

III. *Dérivation de l'original. Si* $f'(t)$ *est l'original, alors*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0). \tag{6}$$

Généralisation. Si $f(t)$ *est* n *fois continûment dérivable sur* $(0, +\infty)$ *et si* $f^{(n)}(t)$ *est l'original, alors*

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

IV. *La dérivation d'une transformée équivaut à la multiplication de son original par « moins l'argument », c'est-à-dire*

$$F'(p) \doteqdot -tf(t). \tag{8}$$

Généralisation :

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t). \tag{9}$$

V. *L'intégration d'un original se ramène à la division de sa transformée par* p :

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{10}$$

VI. *L'intégration d'une transformée équivaut à la division de son original par* t :

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \doteqdot \frac{f(t)}{t} \tag{11}$$

(on suppose que l'intégrale $\int_p^\infty F(p)\,dp$ est convergente).

VII. *Théorème de retard. Pour tout nombre positif* τ,

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p). \tag{12}$$

VIII. *Théorème de translation* (multiplication de l'original par une fonction exponentielle). *Pour tout nombre complexe* λ

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot F(p-\lambda). \tag{13}$$

IX. *Théorème de multiplication* (E. Borel). *Le produit de deux transformées $F(p)$ et $G(p)$ est une nouvelle transformée telle que*

$$F(p)\,G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

L'intégrale figurant au second membre de la relation (14) est appelée *convolution des fonctions $f(t)$* et $g(t)$ et est désignée par le symbole

$$(f * g) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Le théorème IX exprime que la *multiplication des transformées est équivalente à la convolution des originaux*, c'est-à-dire

$$F(p)\,G(p) \doteqdot (f * g). \tag{15}$$

Recherche des originaux dans le cas où les transformées sont des fractions rationnelles. Pour déterminer la fonction originale $f(t)$ de la transformée de Laplace connue $F(p)$, où $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ est une fraction rationnelle, on utilise l'un des procédés suivants:

1) on décompose cette fraction en une somme des éléments simples et on cherche l'original pour chacun d'eux en se servant des propriétés I à IX de la transformation de Laplace.

2) on recherche les pôles p_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ de cette fraction et leurs ordres de multiplicité n_k. Alors, l'original de $F(p)$ sera la fonction

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p)\,(p-p_k)^{n_k} e^{pt}\}, \tag{16}$$

où la somme est étendue à tous les pôles de la fonction $F(p)$.

Dans le cas où tous les pôles p_k de la fonction $F(p)$ sont simples, c'est-à-dire $n_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, la dernière formule se simplifie et prend la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{17}$$

Exemple 1. Trouver l'original $f(t)$, si

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Premier procédé. Décomposons $F(p)$ en éléments simples

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

et cherchons les coefficients indéterminés A, B, C, D. On a

$$p+2 = A(p-2)(p^2+4) + B(p+1)(p^2+4) + \\ + (Cp+D)(p+1)(p-2).$$

En posant dans cette dernière égalité successivement $p=-1$, $p=2$, $p=2i$, on obtient $-15A=1$, $24B=4$,

$$(2Ci+D)(2i+1)(2i-2) = 2+2i,$$

d'où $A=-1/15$, $B=1/6$, $C=-1/10$, $D=-2/5$; et donc

$$F(p) = -\frac{1}{15}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p-2} - \frac{1}{10}\frac{p+4}{p^2+4}.$$

En recherchant les originaux pour chacun des éléments simples et en utilisant la propriété de linéarité, on obtient

$$f(t) = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

Deuxième procédé. Cherchons les pôles p_k de la fonction $F(p)$. Ils coïncident avec les zéros du dénominateur $B(p) = (p+1)(p-2)(p^2+4)$. Ainsi, la transformée $F(p)$ possède quatre pôles simples $p_1=-1$, $p_2=2$, $p_3=2i$, $p_4=-2i$. En utilisant la formule (17), on obtient l'original

$$f(t) = \sum_{k=1}^{4}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} = \sum_{k=1}^{4}\frac{p_k+2}{4p_k^3-3p_k^2+4p-4}e^{p_k t} = \\ = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{-1+2i}{20}e^{2it} + \frac{-1-2i}{20}e^{-2it} = \\ = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

Exemple 2. Déterminer l'original $f(t)$ si $F(p) = \dfrac{p+2}{p^3(p-1)^2}$.

Solution. La fraction donnée $F(p)$ a un pôle $p_1=0$ de multiplicité $n_1=3$ et un pôle $p_2=1$ de multiplicité $n_2=2$. En se servant de la formule (16), on obtient l'original

$$f(t) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}p^3e^{pt}\right] + \\ + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}(p-1)^2e^{pt}\right] = \\ = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right] + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left(\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right) = \\ = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left\{\left[\frac{2p+16}{(p-1)^4} - \frac{2t(p+5)}{(p-1)^3} + \frac{t^2(p+2)}{(p-1)^2}\right]e^{pt}\right\} + \\ + \lim_{p\to 1}\left\{\left[\frac{t(p+2)}{p^3} - \frac{3p^2+5p}{p^4}\right]e^{pt}\right\} = 8+5t+t^2+(3t-8)e^t.$$

2°. Résolution du problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soit à chercher une solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = \quad (t), \tag{18}$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \tag{19}$$

Supposons que la fonction $f(t)$ et la solution $x(t)$ avec ses dérivées jusqu'au second ordre y compris sont des fonctions originales. Soient $x(t) \doteqdot X(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$. D'après la règle de dérivation des originaux et compte tenu de (2), on a

$$x'(t) = pX(p) - x_0, \quad x''(t) = p^2 X(p) - px_0 - x_1.$$

En appliquant aux deux membres de (1) la transformation de Laplace et en utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on obtient une équation opératorielle

$$(p^2 + a_1 p + a_2) X(p) = F(p) + x_0 (p + a_1) + x_1. \tag{20}$$

En résolvant l'équation (20), on trouve une solution sous forme opératorielle

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0 (p + a_1) + x_1}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

En déterminant l'original de $X(p)$, on obtient une solution de l'équation (18) qui satisfait aux conditions initiales (19).

En opérant de façon identique, on peut résoudre toute équation d'ordre n à coefficients constants, avec conditions initiales pour $t=0$.

Exemple 3. Résoudre l'équation

$$x' + x = 1, \tag{21}$$

$$x(0) = 1. \tag{22}$$

Solution. Soit $x(t) \doteqdot X(p)$. Alors d'après la règle de dérivation de l'original, on aura

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

On sait que $1 \doteqdot 1/p$, si bien qu'en passant du problème donné (21)-(22) à l'équation opératorielle, on aura

$$pX(p) - 1 + X(p) = 1/p,$$

d'où

$$(p+1) X(p) = 1 + \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad X(p) = \frac{1}{p},$$

et par suite, $x(t) \equiv 1$.

On se rend compte sans peine que la fonction $x(t) \equiv 1$ satisfait à l'équation donnée et à la condition initiale du problème.

Exemple 4. Résoudre l'équation $x'' - 5x' + 4x = 4$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

Solution. Puisque $4 \doteqdot 4/p$ et d'après les hypothèses du problème $x_0 = x(0) = 0$, $x_1 = x'(0) = 2$, l'équation opératorielle sera de la forme $(p^2 - 5p + 4)\,X(p) = \frac{4}{p} + 2$. On en tire la solution opératorielle

$$X(p) = \frac{2p+4}{p\,(p^2-5p+4)}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples, il vient

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p-4}.$$

En passant aux originaux, on obtient la solution cherchée

$$x(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}.$$

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Solution. Puisque $8e^{-2t} \doteqdot \frac{8}{p+2}$ et par hypothèse $x_0 = x_1 = 1$, l'équation opératorielle sera de la forme

$$(p^2+4p+4)\,X(p) = \frac{8}{p+2} + p + 4 + 1,$$

et donc la solution opératorielle sera

$$X(p) = \frac{p^2+7p+18}{(p+2)^3}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples, il vient

$$X(p) = \frac{8}{(p+2)^3} + \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}.$$

En passant aux originaux, on obtient la solution du problème posé

$$x(t) = 4t^2e^{-2t} + 3te^{-2t} + e^{-2t}.$$

Résoudre les équations suivantes :

830. $x' + 3x = e^{-2t}$, $x(0) = 0$.
831. $x' - 3x = 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, $x(0) = -1$.
832. $x' - x = \cos t - \sin t$, $x(0) = 0$.
833. $2x' + 6x = te^{-3t}$, $x(0) = -1/2$.
834. $x' + x = 2\sin t$, $x(0) = 0$.
835. $x'' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
836. $x'' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
837. $x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

838. $x'' + x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$
839. $x'' + x' = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$
840. $x'' - x' = 1,\ x(0) = -1,\ x'(0) = -1.$
841. $x'' + x = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$
842. $x'' + 6x' = 12t + 2,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$
843. $x'' - 2x' + 2x = 2,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$
844. $x'' + 4x' + 4x = 4,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -4.$
845. $2x'' - 2x' = (t + 1)\,e^t,\ x(0) = 1/2,\ x'(0) = 1/2.$
846. $x'' + x = 2\cos t,\ x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$
847. $x'' + 3x' + 2x = 2t^2 + 1,\ x(0) = 4,\ x'(0) = -3.$
848. $x'' + x = 2e^t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$
849. $x'' - 4x' + 4x = (t - 1)\,e^{2t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$
850. $4x'' - 4x' + x = e^{t/2},\ x(0) = -2,\ x'(0) = 0.$
851. $x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + e^{-2t},\ x(0) = 2,\ x'(0) = -3.$
852. $x'' - x' - 6x = 6e^{3t} + 2e^{-2t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 4/5.$
853. $x'' + 4x' + 4x = t^2e^{-2t},\ x(0) = x'(0) = 0.$
854. $x'' - x' = 2\sin t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$
855. $x'' + 9x = 18\cos 3t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 9.$
856. $x'' + 4x = 4\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1/8.$
857. $x'' + 2x' + 3x = t\cos t,\ x(0) = -1/4,\ x'(0) = 0.$
858. $x'' - 4x' + 5x = 2e^{2t}(\sin t + \cos t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$
859. $x''' - x'' = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 3,\ x''(0) = 2.$
860. $x''' - 4x' = 1,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1/4,\ x''(0) = 0.$
861. $x''' + x'' - 2x = 5e^t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2.$
862. $x'' + x = 8\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),\ x(0) = 0,\ x'(0) = -4.$
863. $x'' + 4x = 2\cos^2 t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

3°. Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soit à chercher une solution du système de deux équations différentielles à coefficients constants

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t), \end{cases} \tag{23}$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{24}$$

Supposons que les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $x(t)$, $y(t)$, ainsi que $x'(t)$ et $y'(t)$, sont des fonctions originales. Soit

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad y(t) \doteqdot Y(p), \quad f_1(t) \doteqdot F_1(p), \; f_2(t) \doteqdot F_2(p).$$

D'après la règle de dérivation des originaux et en tenant compte de (24), on a

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0, \quad y'(t) \doteqdot pY(p) - y_0.$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de chacune des équations du système (23), on obtient un système sous forme opératorielle

$$\begin{cases} pX(p) = a_1X(p) + b_1Y(p) + F_1(p) + x_0, \\ pY(p) = a_2X(p) + b_2Y(p) + F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations algébriques linéaires à deux inconnues $X(p)$ et $Y(p)$. En le résolvant, on trouve $X(p)$ et $Y(p)$ et ensuite, en passant aux originaux, on obtient une solution $x(t)$, $y(t)$ du système (23) satisfaisant aux conditions initiales (24). En opérant de manière analogue, on résout les systèmes linéaires de la forme

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l + f_k(t), \quad a_{kl} = \text{const}, \quad x_k(0) = x_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemple 6. Trouver une solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

qui satisfait à la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Solution. Comme $5 \doteqdot 5/p$, $-37t = -37/p^2$ et $x_0 = y_0 = 0$, le système opératoriel sera de la forme

$$\begin{cases} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p}, \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

En le résolvant, on obtient

$$X(p) = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2(p^2 + 12p + 37)}, \qquad Y(p) = \frac{-47p - 259}{p^2(p^2 + 12p + 37)}.$$

Décomposons en éléments simples les fractions figurant aux seconds membres, il vient

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{p^2+12p+37},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{p^2+12p+37},$$

ou

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}.$$

En passant aux originaux, on obtient la solution cherchée

$x(t) = 1-t-e^{-6t}\cos t, \qquad y(t) = 1-7t + e^{-6t}\cos t + e^{-6t}\sin t.$

Dans les problèmes qui suivent, résoudre par la méthode opérationnelle les systèmes d'équations:

864. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+x=0, \end{cases} \quad x(0)=2,\ y(0)=0.$

865. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x-2y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+x+4y=0, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$

866. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2(x+y), \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$

867. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2y=3t, \\ \dfrac{dy}{dt}-2x=4, \end{cases} \quad x(0)=2,\ y(0)=3.$

868. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x=y+e^t, \\ \dfrac{dy}{dt}+y=x+e^t, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$

869. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = -\sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = \frac{1}{2}, \; y(0) = -\frac{1}{2}.$

870. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 2, \; z(0) = 3.$

871. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4y, \end{cases} \quad x(0) = 5, \; y(0) = 0, \; z(0) = 4.$

872. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + x + y + z = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x + z = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x(0) = y(0) = 1, \\ z(0) = -2. \end{array}$

873. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

874. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1, \; x'(0) = 2, \; y'(0) = 0.$

875. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x - 4y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -x + y, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x(0) = 2, \; y(0) = 0, \\ x'(0) = -\sqrt{3}, \; y'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}$

876. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = e^t - x, \\ \dfrac{d^2y}{dt} + \dfrac{dx}{dt} = 1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x(0) = 1, \; y(0) = 0, \\ x'(0) = 2, \; y'(0) = -1. \end{array}$

877. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+x+y=5, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-4x-3y=-3, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0.$

878. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+4y+2x=4t+1, \\ \dfrac{dy}{dt}+x-y=\dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=0.$

879. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+y-2x=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+x-2y=-5\,e^t\sin t, \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=3.$

CHAPITRE IV

THÉORIE DE LA STABILITÉ

§ 25. Stabilité au sens de Liapounov. Notions fondamentales et définitions

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Une solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ du système (1) satisfaisant aux conditions initiales $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est dite stable *au sens de Liapounov* pour $t \to +\infty$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour *toute* solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, du système (1) dont les valeurs initiales satisfont aux conditions

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

l'on ait les inégalités

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

pour *tous* les $t \geqslant t_0$.

La solution $\varphi_i(t)$ est dite *instable* si, pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, les inégalités (3) ne sont pas vérifiées pour au moins une solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si, sous la condition (2), en plus des inégalités (3) est aussi vérifiée la condition

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

la solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est dite *asymptotiquement stable*.

L'étude de la stabilité de la solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ du système (1) peut être ramenée à celle de la solution nulle (triviale) $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, d'un certain système, analogue au système (1):

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1'}$$

où $F_i(0, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

On dit que le point $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est le *point de repos* du système (1').

Appliquées au point de repos, les définitions de la stabilité et de l'instabilité peuvent être énoncées de la façon suivante. Le *point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *est stable au sens de Liapounov* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dont les valeurs initiales $x_{i0} = x_i(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, satisfont à la condition

$$|x_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (2')$$

vérifie les inégalités

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (3')$$

pour tous les $t \geqslant t_0$.

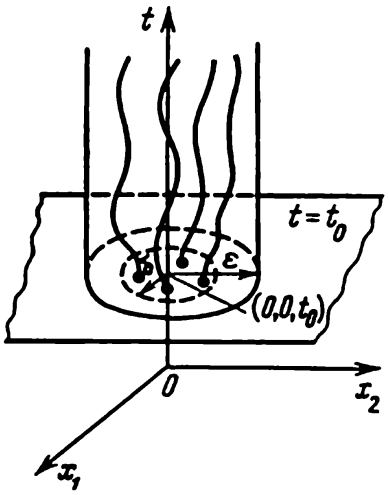

Fig. 30

Dans le cas où $n = 2$, on peut en donner l'interprétation géométrique suivante. Quelque petit que soit le rayon ε d'un cylindre d'axe Ot, il existe dans le plan $t = t_0$ un voisinage δ du point $(0, 0, t_0)$ tel que toutes les courbes intégrales

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

issues de ce voisinage seront confinées, pour tous les $t \geqslant t_0$, à l'intérieur de ce cylindre (fig. 30).

Si, en plus des inégalités (3), est aussi satisfaite la condition $\lim\limits_{t \to +\infty} |x_i(t)| = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, la *stabilité est asymptotique.*

Un *point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est dit *instable* si, pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, l'une au moins des solutions $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ne satisfait pas à la condition (3').

Exemple 1. En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, étudier la stabilité d'une solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x \quad (5)$$

qui satisfait à la condition initiale

$$x(0) = 0.$$

Solution. L'équation (5) est une équation linéaire non homogène. Sa solution générale est $x(t) = Ce^{-t} + t$. A la condition initiale $x(0) = 0$ satisfait une solution

$$\varphi(t) = t \quad (6)$$

de l'équation (5). A la condition initiale $x(0) = x_0$ satisfait une solution

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t. \quad (7)$$

Considérons la différence des solutions (7) et (6) de l'équation (5) et écrivons-la sous la forme

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)\, e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ (par exemple $\delta = \varepsilon$) tel que toute solution $x(t)$ de l'équation (5), dont les valeurs

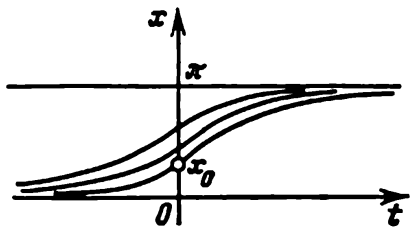

Fig. 31

initiales satisfont à la condition $|x_0 - 0| < \delta$, vérifie l'inégalité

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|\, e^{-t} < \varepsilon$$

pour tous les $t \geqslant 0$. Par suite, la solution $\varphi(t) = t$ est stable. De plus, puisque

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to +\infty} |x_0 - 0|\, e^{-t} = 0$$

la solution $\varphi(t) = t$ est asymptotiquement stable.

Cette solution $\varphi(t)$ est non bornée pour $t \to +\infty$. ◆

L'exemple que nous venons de traiter montre que la stabilité de la solution d'une équation différentielle n'entraîne pas que cette solution est bornée.

Exemple 2. Considérons l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x. \tag{8}$$

Elle possède des solutions évidentes

$$x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Intégrons l'équation (8), il vient

$$\operatorname{ctg} x = C - t, \quad \text{ou } \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t,$$

d'où

$$x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t), \quad x \neq k\pi. \tag{10}$$

Toutes les solutions (9) et (10) sont bornées sur $(-\infty, +\infty)$. Pourtant, la solution $x(t) \equiv 0$ est instable lorsque $t \to +\infty$, car pour tout $x_0 \in (0, \pi)$ on a $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \pi$. Par suite, le fait que les solutions d'une équation différentielle sont bornées n'implique pas en général que ces solutions sont stables (fig. 31).

Ce phénomène est caractéristique des équations non linéaires et des systèmes non linéaires.

Exemple 3. En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, montrer qu'une solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{11}$$

qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ est stable.

Solution. La solution du système (11) satisfaisant aux conditions initiales données est $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Toute solution de ce système satisfaisant aux conditions $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ est de la forme

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et montrons qu'il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$ on l'ait les inégalités

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$
$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

pour tous les $t \geqslant 0$.

Cela signifiera justement, en vertu de la définition même, que la solution nulle $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ du système (11) est stable au sens de Liapounov. On a évidemment

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leqslant |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leqslant |x_0| + |y_0|,$$
$$|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leqslant |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leqslant |x_0| + |y_0| \tag{12}$$

pour tous les t. Donc, si $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, on a à plus forte raison

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \tag{13}$$

pour tous les t.

Par conséquent, si l'on prend par exemple $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, alors, pour $|x_0| < \delta$ et $|y_0| < \delta$ on aura, en raison de (12), les inégalités (13) pour tous les $t \geqslant 0$, c'est-à-dire que réellement la solution nulle du système (11) est stable au sens de Liapounov, mais cette stabilité n'est pas asymptotique.

Théorème. *Les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

sont toutes soit simultanément stables soit instables.

Cette assertion n'est pas vraie pour des systèmes non linéaires dont certaines solutions peuvent être stables et d'autres instables.

Exemple 4. Considérons une équation non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t). \tag{14}$$

Elle a des solutions évidentes $\varphi(t) = -1$ et $\varphi(t) = 1$.

La solution $\varphi(t) = -1$ de cette équation est instable alors que la solution $\varphi(t) = 1$ est asymptotiquement stable. En effet, lorsque $t \to +\infty$, toutes les solutions de l'équation (14)

$$x(t) = \frac{(1+x_0)\, e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)\, e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)} \qquad (x_0 \neq -1)$$

tendent vers $+1$. Par définition, cela signifie que la solution $\varphi(t) \equiv 1$ de l'équation est asymptotiquement stable.

En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, étudier la stabilité des équations et des systèmes d'équations suivants :

880. $\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1.$

881. $\frac{dx}{dt} = 2t(x+1), \quad x(0) = 0.$

882. $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$

883. $\frac{dx}{dt} = 2 + t, \quad x(0) = 1.$

884. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

885. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

§ 26. Types les plus simples de points de repos

Soit donné un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le point $x = 0$, $y = 0$ en lequel s'annulent les seconds membres des équations du système (1) s'appelle *point de repos du système* (1).

Pour étudier le point de repos du système (1) il faut établir l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2.

Les cas suivants peuvent se présenter :

1. Les racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique (2) sont réelles et distinctes :

a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable, fig. 32);

b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable, fig. 33);

c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est instable (col, fig. 34).

2. Les racines de l'équation caractéristique (2) sont complexes : $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$:

a) $p < 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable, fig. 35);

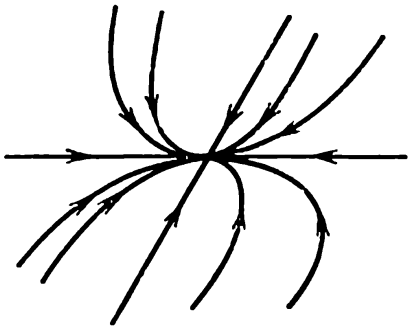

Fig. 32

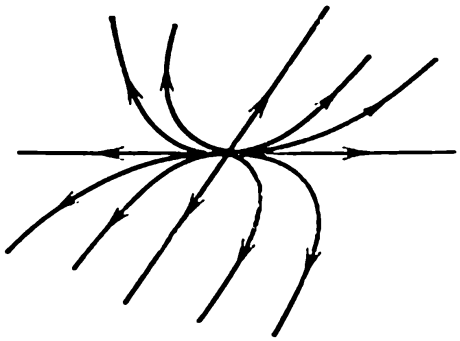

Fig. 33

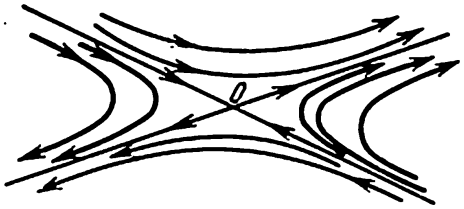

Fig. 34

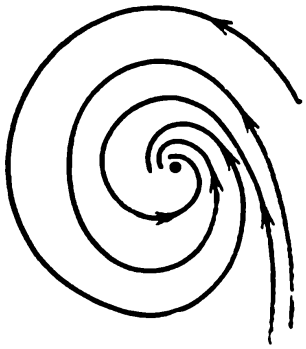

Fig. 35

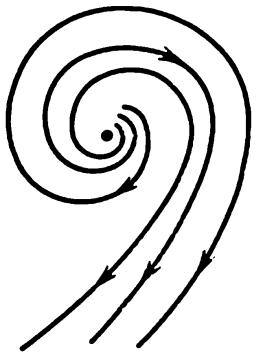

Fig. 36

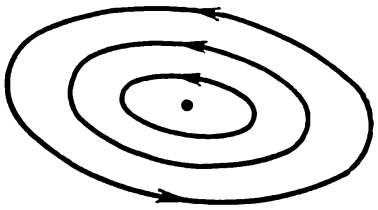

Fig. 37

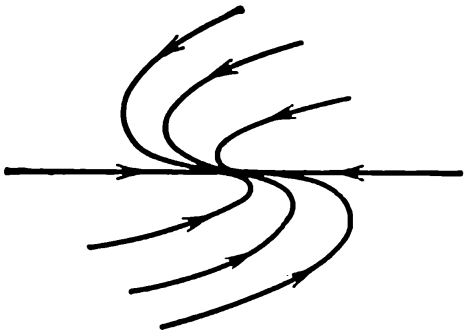

Fig. 38

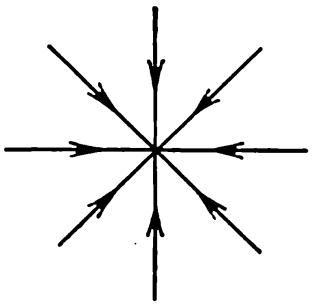

Fig. 39

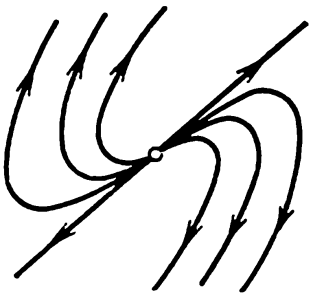

Fig. 40

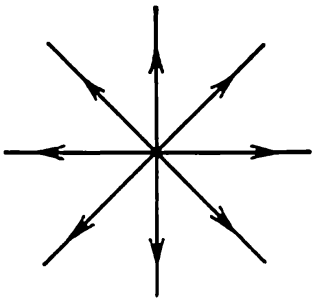

Fig. 41

b) $p > 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est instable (foyer instable, fig. 36);

c) $p = 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est stable (centre, fig. 37).

3. Les racines $\lambda_1 = \lambda_2$ sont multiples:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable, fig. 38, 39);

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable, fig. 40, 41).

Exemple 1. Définir la nature du point de repos (0,0) du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ sont réelles, distinctes et positives. Par suite, le point de repos (0, 0) est un nœud instable.

La relation qui existe entre les types de points de repos et les valeurs des racines de l'équation caractéristique (2) peut être visua-

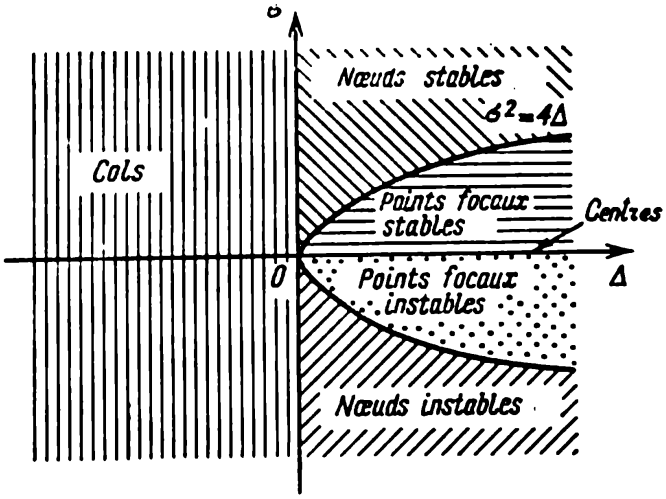

Fig. 42

lisée. A cet effet, introduisons les désignations $\sigma = -(a_{11} + a_{22})$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Alors, l'équation caractéristique (2) s'écrira sous la forme $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$.

Considérons un plan muni de coordonnées cartésiennes rectangulaires Δ et σ et indiquons dans ce plan les régions correspondant aux divers types de points de repos (fig. 42). De la classification donnée plus haut il résulte que les conditions de stabilité d'un point de repos sont $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Elles sont réalisées pour $\Delta > 0$ et $\sigma > 0$, c'est-à-dire pour des points situés dans le premier quadrant.

Si λ_1 et λ_2 sont complexes, le point de repos sera du type d'un foyer. A cette condition satisfont des points qui se situent entre les branches de la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$ et n'appartiennent pas à l'axe $O\Delta$ ($\sigma^2 < 4\Delta$, $\sigma \neq 0$).

Les points situés sur le demi-axe $\sigma = 0$, pour lesquels $\Delta > 0$ correspondent à des points du type d'un centre.

Les points situés en dehors de la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$ ($\sigma^2 > 4\Delta$) correspondent à des points du type d'un nœud.

La région $O\Delta\sigma$ du plan où $\Delta < 0$ renferme des points du type d'un col.

En faisant abstraction des cas particuliers (passage par l'origine de coordonnées), remarquons qu'un col peut se transformer en un nœud stable ou instable (fig. 42). Un nœud stable peut se transformer soit en un col soit en un foyer stable. Le cas des racines égales $\lambda_1 = \lambda_2$ correspond à la frontière entre les nœuds et les foyers, c'est-à-dire à la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$.

Exemple 2. Etudier l'équation des oscillations élastiques

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0 \tag{3}$$

tenant compte du frottement et de la résistance du milieu (pour $\alpha > 0$).

Solution. Passons de l'équation (3) au système d'équations équivalent

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x. \end{cases} \tag{4}$$

Pour établir la nature du point de repos (0, 0) du système (4), formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{5}$$

Considérons les cas suivants: a) $\alpha = 0$ (la résistance du milieu est nulle). De (5) on obtient $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Le point de repos est stable et représente un centre (tous les mouvements sont périodiques);

b) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Le point de repos est un foyer stable (les oscillations s'amortissent);

c) $\alpha < 0$ (cas d'un « frottement négatif »), $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Le point de repos est un foyer instable;

d) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geqslant 0$ (la résistance du milieu est grande $\alpha \geqslant \beta$). Les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et négatives. Le point de

repos est un nœud stable (tous les mouvements sont amortis et non oscillatoires);

e) $\alpha < 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geqslant 0$ (cas d'un « frottement négatif » élevé). Les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et positives. Le point de repos est un nœud instable.

Déterminer la nature des points de repos pour les systèmes d'équations différentielles suivants:

886. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

887. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

888. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

889. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

890. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + \dfrac{5}{7}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$

891. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

892. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$

893. Le point de repos (0, 0) du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

pour quelles valeurs de α est-il stable?

Soit un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ (n \geqslant 2). \tag{6}$$

On constate que ce système se caractérise par des types analogues de disposition des courbes intégrales au voisinage de l'origine des coordonnées (*col généralisé*, *nœud généralisé*, etc.).

Théorème. *Si toutes les racines de l'équation caractéristique du système* (6) *possèdent une partie réelle négative, alors le point de repos*

$x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de ce système est asymptotiquement stable. Si au moins une racine de l'équation caractéristique a une partie réelle positive, le point de repos est instable.

Exemple 3. Soit donné le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z. \end{cases}$$

Son point de repos (0, 0, 0) sera-t-il stable?

Solution. Etablissons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou $(1 + \lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$. Les racines de cette équation $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ont des parties réelles négatives. Par conséquent, le point de repos de ce système sera asymptotiquement stable.

Etudier la stabilité du point de repos O (0, 0, 0) des systèmes suivants:

894. a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -3z; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 3y - z. \end{cases}$

§ 27. Méthode des fonctions de Liapounov

La méthode des fonctions de Liapounov consiste à étudier directement la stabilité de la position d'équilibre du système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

à l'aide d'une fonction convenablement choisie $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ que l'on appelle *fonction de Liapounov* et ceci sans rechercher au préalable les solutions du système.

Bornons-nous à examiner des systèmes autonomes

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

pour lesquels $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ est un point de repos.

On dit qu'une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées est *de signe défini* (définie positive ou définie négative), si dans un domaine

$$|x_i| \leqslant h, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

où h est un nombre positif suffisamment petit, elle ne peut prendre que des valeurs de signe défini et ne s'annule que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. C'est ainsi que dans le cas de $n = 3$ les fonctions

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{et} \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

seront des fonctions définies positives et la valeur de $h > 0$ peut être prise ici aussi grande que l'on veut.

On dit qu'une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est *de signe constant* (positive ou négative) si, dans le domaine (2) elle ne peut prendre que des valeurs d'un seul signe déterminé, mais peut s'annuler aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. Par exemple, la fonction

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$$

est une fonction de signe constant (positif). En effet, la fonction $V(x_1, x_2, x_3)$ peut se mettre sous la forme: $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ qui montre qu'elle s'annule aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, à savoir pour $x_3 = 0$ et pour des x_1 et x_2 tels que $x_1 = -x_2$.

Soit $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction dérivable de ses arguments et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ certaines fonctions du temps qui satisfont au système d'équations différentielles (1). Alors, la dérivée totale de la fonction V par rapport au temps aura pour expression

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

La grandeur $\frac{dV}{dt}$ définie par la formule (3) s'appelle *dérivée totale de la fonction V par rapport au temps* composée en raison du système d'équations (1).

Théorème 1 (théorème de Liapounov de la stabilité). *Si pour le système d'équations différentielles* (1) *il existe une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de signe défini (fonction de Liapounov) dont la dérivée totale*

par rapport au temps $\frac{dV}{dt}$ *composée en vertu du système* (1) *est une fonction de signe constant, inverse de* V *ou est identiquement nulle, alors le point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *du système* (1) *est stable.*

Théorème 2 (théorème de Liapounov de la stabilité asymptotique). *Si pour le système d'équations différentielles* (1) *il existe une fonction de signe défini* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dont la dérivée totale par rapport au temps, composée en vertu du système* (1), *est aussi une fonction de signe défini inverse de* V, *alors le point de repos* $x_i = 0$ *du système* (1) *est asymptotiquement stable.*

Exemple 1. Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{4}$$

Prenons pour $V(x, y)$ la fonction $V = x^2 + y^2$. C'est une fonction définie positive. La dérivée de la fonction V en vertu du système (4) est

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0.$$

Du théorème 1 il résulte que le point de repos $O(0, 0)$ du système (4) est stable. Pourtant sa stabilité n'est pas asymptotique : les trajectoires du système (4) sont des circonférences et elles ne tendent pas vers le point $O(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exemple 2. Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases} \tag{5}$$

En prenant toujours $V(x, y) = x^2 + y^2$, on trouve

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4).$$

Ainsi, $\frac{dV}{dt}$ est une fonction définie négative. En vertu du théorème 2 le point de repos $O(0, 0)$ du système (5) est asymptotiquement stable.

Une méthode générale permettant de former les fonctions de Liapounov n'existe pas. Dans les cas les plus simples, on peut chercher la fonction de Liapounov sous la forme

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad V(x, y) = ax^4 + by^4,$$
$$V(x, y) = ax^4 + by^2 \ (a > 0, \ b > 0), \text{ etc.}$$

Exemple 3. Etudier à l'aide d'une fonction de Liapounov la stabilité de la solution nulle $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ du système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{x^3y}{2}. \end{cases}$$

Solution. Cherchons la fonction de Liapounov sous la forme $V = ax^2 + by^2$, où $a > 0$, $b > 0$ sont des paramètres arbitraires. On a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + \\ + 2by\left(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y\right) = -(2ax^2 + by^2) + \\ + (2xy - x^3y^2)(b - 2a).$$

En posant $b = 2a$, on obtient $\frac{dV}{dt} = -2a(x^2 + y^2) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $a > 0$ et $b = 2a$ la fonction $V = ax^2 + 2ay^2$ sera une fonction définie positive et sa dérivée $\frac{dV}{dt}$ formée en vertu du système donné sera une fonction définie négative. Du théorème 2 de Liapounov il résulte que la solution nulle $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ du système donné est asymptotiquement stable.

Si l'on ne parvient pas à trouver la fonction $V(x, y)$ sous la forme indiquée plus haut, il convient de la chercher sous la forme $V = ax^4 + by^4$ ou $V = ax^4 + by^2$, etc.

Théorème 3 (théorème de Liapounov de l'instabilité). *Supposons que pour le système d'équations différentielles* (1) *il existe une fonction* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dérivable au voisinage de l'origine des coordonnées et telle que* $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$. *Si sa dérivée totale* $\frac{dV}{dt}$ *formée en vertu du système* (1) *est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées des points en lesquels la fonction* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *prend des valeurs positives, alors le point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *est instable.*

Théorème 4 (théorème de Tchétaev de l'instabilité). *Supposons que pour le système d'équations différentielles* (1) *il existe une fonction* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *continûment dérivable dans un certain voisinage du point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *et satisfaisant, dans un certain voisinage fermé du point de repos, aux conditions suivantes:*

1) *dans le voisinage* Ω *aussi petit que l'on veut du point* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *il existe un domaine* Ω_1 *dans lequel* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ *et* $v = 0$ *en des points frontières de* Ω_1 *qui sont intérieurs pour* Ω (fig. 43);

2) *le point de repos* $O(0, 0, \ldots, 0)$ *est un point frontière du domaine* Ω_1;

3) *dans le domaine* Ω_1 *la dérivée* $\frac{dv}{dt}$ *formée en vertu du système* (1) *est une fonction définie positive.*

Alors, le point de repos $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, du système (1) est instable.

Exemple 4. Etudier la stabilité du point de repos $x = 0$, $y = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

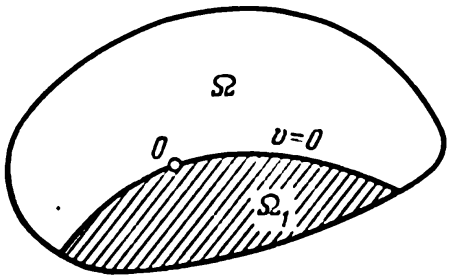

Fig. 43

Solution. Prenons la fonction $v(x, y) = x^2 - y^2$. Alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

est une fonction définie positive. Puisqu'il existe des points situés aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées en lesquels $v > 0$ (par exemple $v = x^2 > 0$ le long de la droite $y = 0$), toutes les conditions du théorème 3 sont réalisées et donc le point de repos $O(0, 0)$ est instable (col).

Exemple 5. Etudier la stabilité du point de repos $x = 0$, $y = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

Solution. La fonction $v = x^4 - y^4$ satisfait aux conditions du théorème de Tchétaev:

1) $v > 0$ pour $|x| > |y|$;

2) $\frac{dv}{dt} = 4(x^8 - y^8)$ est une fonction définie positive dans le domaine $|x| > |y|$.

Par suite, le point de repos $x = 0$, $y = 0$ est instable.

Etudier la stabilité des solutions nulles des systèmes suivants:

895. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3. \end{cases}$

896. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \frac{dy}{dt} = x^4 y. \end{cases}$

897. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 4x^2 y. \end{cases}$

898. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4}, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$

899. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases}$

900. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^2y^2 - \dfrac{1}{4}x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - x^3y - \dfrac{1}{2}y^3. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$

902. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - y^3. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2y^3 - y^7 + 2x. \end{cases}$

904. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y^5. \end{cases}$

906. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - x^3 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$

907. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 + 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2y. \end{cases}$

908. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y - x(x-y)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - \dfrac{3}{2}y(x-y)^2. \end{cases}$

909. Soit $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction définie positive deux fois continûment dérivable et telle que

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial v(0)}{\partial x_n} = 0.$$

Etudier la stabilité de la solution nulle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_n}. \end{cases}$$

§ 28. Stabilité en première approximation

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

et soit $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est un point de repos du système (1), c'est-à-dire $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous supposerons que les fonctions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont un nombre de fois suffisant dérivables à l'origine des coordonnées.

Développons la fonction f_i en série de Taylor suivant x dans le voisinage de l'origine des coordonnées

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ici, $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ et R_i sont des termes du deuxième ordre de petitesse par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Alors, le système initial (1) prend la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Considérons au lieu du système (2) le système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (a_{ij} = \text{const}), \tag{3}$$

appelé *système d'équations en première approximation* du système (1).

On peut énoncer les propositions suivantes.

1. Si toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

possèdent des parties réelles négatives, la solution nulle $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, du système (3) et celle du système (2) sont asymptotiquement stables.

2. Si au moins une racine de l'équation caractéristique (4) possède une partie réelle positive, la solution nulle du système (3) et celle du système (2) sont instables.

On dit que dans les cas 1 et 2 il est possible d'étudier la stabilité en première approximation.

Dans des cas critiques, où les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique (4) sont non positives et la partie réelle d'au moins une racine est nulle, l'étude de la stabilité en première approximation est en général impossible (l'influence due aux termes non linéaires R_i devient considérable).

Exemple 1. Etudier la stabilité en première approximation du point de repos $x = 0$, $y = 0$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} = 3x + y + \frac{x^3}{2} \end{cases} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right). \tag{5}$$

Solution. Le système en première approximation est

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases} \tag{6}$$

et les termes non linéaires satisfont aux conditions énoncées: leur ordre est supérieur ou égal à deux. Ecrivons l'équation caractéristique du système (6):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0. \tag{7}$$

Les racines de l'équation caractéristique (7) $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{3}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ sont réelles et $\lambda_1 > 0$. Par suite, la solution nulle $x = 0$, $y = 0$ du système (5) est instable.

Exemple 2. Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3. \end{cases} \tag{8}$$

Le point de repos $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ du système (8) est asymptotiquement stable car pour ce système la fonction $v = x^2 + y^2$ satisfait à toutes les conditions du théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique. En particulier,

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leqslant 0.$$

En même temps, le point de repos $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3 \end{cases} \tag{9}$$

est instable en vertu du théorème de Tchétaev: en prenant $v = x^2 + y^2$, on aura $\frac{dv}{dt} = 2(x^4 + y^4) \geqslant 0$.

Les systèmes (8) et (9) ont le même système en première approximation

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{10}$$

L'équation caractéristique du système (10)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

possède des racines imaginaires pures de sorte que les parties réelles de ses racines sont nulles.

Pour le système en première approximation (10) l'origine de coordonnées sert de centre. Les systèmes (8) et (9) sont obtenus par suite de petites perturbations des seconds membres du système (10) au voisinage de l'origine des coordonnées. Pourtant ces petites perturbations ont pour résultat la transformation des trajectoires fermées en des spirales. Dans le cas (8), ces spirales s'approchent de l'origine des coordonnées et forment un foyer stable au point O (0, 0), alors que dans le cas (9) elles s'éloignent de l'origine des coordonnées et forment au point O (0, 0) un foyer instable. Ainsi, dans un cas critique, les termes non linéaires peuvent influer sur la stabilité du point de repos.

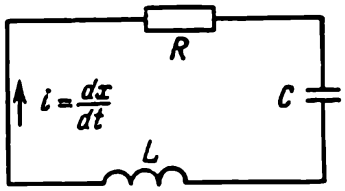

Fig. 44

Exemple 3. Considérons un circuit électrique fermé comprenant des éléments non linéaires (fig. 44); l'équation de ce circuit est

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + \frac{1}{C}x + g\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{11}$$

Ici, x est la charge électrique du condensateur et donc $\frac{dx}{dt}$, le courant dans le circuit; R, la résistance, L, l'inductance; C, la capacité; $g\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ sont des termes non linéaires de degré non inférieur à deux, $g(0, 0) = 0$. L'équation (11) est équivalente au système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC}x - \dfrac{R}{L}y - \dfrac{1}{L}g(x, y), \end{cases} \tag{12}$$

pour lequel l'origine des coordonnées O (0, 0) est un point de repos.

Considérons le système en première approximation

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC}x - \dfrac{R}{L}y. \end{cases} \tag{13}$$

L'équation caractéristique du système (13) est de la forme

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + \frac{R\lambda}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \tag{14}$$

Si $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$, c'est-à-dire si $R^2 < \frac{4L}{C}$, l'équation (14) a des racines complexes à partie réelle négative $p = -\frac{R}{4L}$ et donc pour les systèmes (13) et (12) l'origine des coordonnées O (0, 0) est asymptotiquement stable.

Si $R^2 > \frac{4L}{C}$, l'origine des coordonnées est aussi asymptotiquement stable (tous les paramètres R, L, C sont positifs).

La stabilité asymptotique du point de repos découle des considérations physiques: lorsque la résistance ohmique est positive, le courant finit inévitablement par disparaître avec le temps.

Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle $x = 0$, $y = 0$ des systèmes suivants:

910. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1). \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$

912. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$

913. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y^3, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$

914. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4\cos y^2, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$

915. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2} x e^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + y e^{-\frac{y^2}{2}} - y^4 \cos x. \end{cases}$

918. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4} \sin x - 7y (1-y)^{\frac{1}{3}} + x^5, \\ \dot{y} = \frac{2}{3} x - 3y \cos y - 11y^5. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4} (e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5} x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$

920. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^{y}. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^{\cdot}, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$

§ 29. Stabilité des solutions des équations différentielles par rapport à la variation des seconds membres des équations

Considérons des équations différentielles

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y' = f(x, y) + \Theta(x, y), \tag{2}$$

où les fonctions $f(x, y)$ et $\Theta(x, y)$ sont continues dans un domaine fermé $\overline{G}$ du plan xOy et la fonction $f(x, y)$ possède dans ce domaine une dérivée partielle continue $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Supposons que dans le domaine $\overline{G}$ soit vérifiée l'inégalité $|\Theta(x, y)| \leqslant \varepsilon$. Si $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ sont solutions des équations (1) et (2) respectivement, qui satisfont à la même condition initiale $\varphi|_{x=x_0} = \psi|_{x=x_0} = y_0$, alors

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1), \tag{3}$$

où

$$M = \max_{(x, y) \in \overline{G}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

De l'estimation (3) il est immédiat de voir que si la perturbation $\Theta(x, y)$ du second membre de l'équation (1) est suffisamment petite dans le domaine $\bar{G}$, alors la différence entre les solutions des équations (1) et (2) sera petite en valeur absolue sur un intervalle fini de variation de x. Cela permet de résoudre de façon approchée les équations différentielles compliquées, en les remplaçant par des équations convenablement choisies dont la résolution est plus simple. Cette dernière circonstance peut être judicieusement mise à profit lors de la résolution des équations différentielles liées aux problèmes de physique ou de technique.

Exemple. Dans un carré $Q\left\{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, trouver une solution approchée de l'équation

$$y' = \sin(xy) \tag{4}$$

qui satisfait à la condition initiale

$$y\,|_{x=0} = 0{,}1 \tag{5}$$

et évaluer l'erreur.

Solution. Remplaçons l'équation (4) par l'équation

$$y' = xy, \tag{6}$$

$$y\,|_{x=0} = 0{,}1. \tag{7}$$

Pour la condition initiale (7), l'équation (6) admet une solution $y = 0{,}1\cdot e^{x^2/2}$ qui est comprise dans le carré principal Q pour tout $x\in[-1/2;\ 1/2]$.

En vertu du théorème d'existence et d'unicité de la solution, l'équation (4) possède pour la condition initiale (5) la solution unique $y = \psi(x)$ si bien que pour une solution approchée du problème (4)-(5) on peut prendre $y = 0{,}1\cdot e^{x^2/2}$ qui est solution du problème (6)-(7).

Evaluons l'erreur

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad -1/2\leqslant x\leqslant 1/2,$$

où $\varphi(x) = 0{,}1\cdot e^{x^2/2}$ est solution du problème (6)-(7). Dans le cas actuel, $f(x, y) = xy$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x|\leqslant\frac{1}{2}$. D'après la formule de Taylor $|\sin z - z|\leqslant\frac{|z|^3}{6}$ de sorte que dans le carré Q on a

$$|\sin xy - xy|\leqslant\frac{|xy|^3}{6}<\frac{1}{4^3\cdot 6}=\frac{1}{384}.$$

Utilisons l'estimation (3) en prenant $\varepsilon=\frac{1}{384}$, $M=\max\limits_{(x,y)\in Q}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{1}{2}$:

$$\Delta=|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{1}{192}\left(e^{\frac{1}{2}|x|}-1\right)<\frac{1}{650},\ x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right].$$

On se rend compte sans peine que la solution $\psi(x)$ du problème (4)-(5) ne quitte pas les limites du carré principal Q.

Etablir la différence entre les solutions des équations données qui satisfont à la même condition initiale $y|_{x=x_0} = y_0$ sur des intervalles donnés ($x_0 = 0$):

923. $y' = \frac{y}{1+x} + x^2$,

$y' = \frac{y}{1+x} + x^2 + 0{,}01 \sin x$ sur $[0, 1]$.

924. $y' = e^{-\frac{\sin y}{1+x^2}}$,

$y' = e^{-\frac{\sin y}{1+x^2}} + \frac{\cos xy}{10(4+x^4)}$ sur $[0,2]$.

925. $y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy$,

$y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy + 0{,}001 e^{-x^2}$ sur $[0,1]$.

§ 30. Critère de Routh et Hurwitz

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \; (a_0, a_1, \ldots, a_n = \text{const}, a_0 > 0). \qquad (1)$$

La solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation (1) est asymptotiquement stable si toutes les racines de l'équation caractéristique

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2)$$

ont leur partie réelle négative.

Critère de Routh et Hurwitz. *Pour que toutes les racines de l'équation* (2) *aient leurs parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz soient positifs*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

La matrice de Hurwitz est formée comme suit. Suivant la diagonale principale on écrit les coefficients du polynôme (2) en commençant par a_1 et en finissant par a_n. Les colonnes sont constituées alternativement de coefficients affectés de seuls indices impairs ou de

seuls indices pairs, le coefficient a_0 étant compris au nombre de ceux derniers. Tous les autres éléments de la matrice correspondant aux coefficients d'indices supérieurs à n ou inférieurs à 0 sont supposés nuls. Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont de la forme

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1, & a_0 \\ a_3, & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Ainsi, la condition de Hurwitz s'énonce: *pour que la solution* $y \equiv 0$ *de l'équation* (1) *soit stable il faut et il suffit que soient vérifiées les relations*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \Delta_n > 0. \tag{4}$$

Puisque $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, la condition $\Delta_n > 0$ peut être remplacée par celle de $a_n > 0$.

Exemple. Étudier la stabilité de la solution nulle de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0. \tag{5}$$

Solution. Etablissons l'équation caractéristique

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Ici, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 19$, $a_4 = 10$. Ecrivons les mineurs diagonaux de la matrice de Hurwitz

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \Delta_1 = 5 > 0,$$

c'est-à-dire $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$. On voit donc, que la solution triviale $y \equiv 0$ de l'équation (5) est asymptotiquement stable.

Le calcul peut se faire, par exemple, comme suit. On forme d'abord le mineur d'indice le plus élevé Δ_n de la matrice de Hurwitz. A partir de lui, on écrit sans peine tous les mineurs d'ordre inférieur $\Delta_{n-1}, \ldots$ $\ldots, \Delta_1$. Puis, on commence à calculer successivement Δ_1, Δ_2,

etc. Si l'on rencontre un mineur négatif, c'est le signe que la solution est instable de sorte que le calcul ultérieur devient inutile.

Etudier la stabilité de la solution nulle des équations suivantes :

926. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

927. $y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$

928. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0.$

929. $y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' + 2y = 0.$

930. $y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0.$

931. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0.$

932. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0.$

933. $y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0.$

934. $y^{IV} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0.$

935. $y^{V} + 3y^{IV} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0.$

936. $y^{V} + 7y^{IV} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0.$

Pour quelle valeur de α la solution nulle des équations suivante sera-t-elle stable ?

937. $y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0.$

938. $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + y' + 3y = 0.$

939. $y^{IV} + 2y''' + \alpha y'' + y' + y = 0.$

Pour quelles valeurs de α, β la solution nulle des équations suivantes sera-t-elle stable ?

940. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + y = 0.$

941. $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0.$

§ 31. Critère géométrique de stabilité (critère de Mikhaïlov)

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients réels constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Son équation caractéristique est

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2}$$

Le critère de Mikhaïlov permet de résoudre la question relative à la disposition des racines de l'équation caractéristique (2) sur le plan complexe et donc d'établir si la solution nulle de l'équation (1) est stable ou ne l'est pas. En posant $\lambda = i\omega$, on obtient

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

où

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots,$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \ldots.$$

La quantité $f(i\omega)$ peut être représentée pour une valeur donnée du paramètre ω sous la forme d'un vecteur sur le plan complexe u, v ayant son origine à l'origine des coordonnées.

Lorsque le paramètre ω varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ l'extrémité de ce vecteur décrit une certaine courbe appelée *courbe de Mikhaïlov* (fig. 45). La fonction $u(\omega)$ étant paire, la courbe de

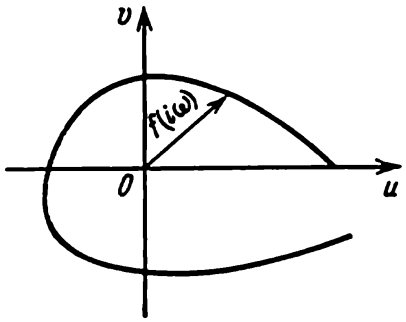

Fig. 45

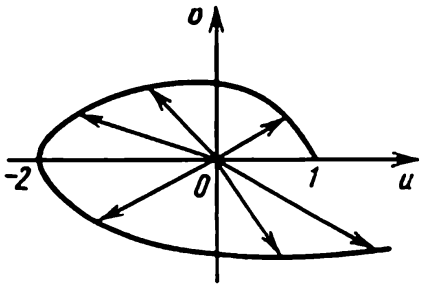

Fig. 46

Mikhaïlov est symétrique par rapport à l'axe Ou si bien qu'il suffit de construire seulement une partie de la courbe correspondant à la variation du paramètre ω dans les limites de 0 à $+\infty$.

Si le polynôme $f(\lambda)$ de degré n possède m racines ayant leur partie réelle positive et $n - m$ racines ayant leur partie réelle négative, l'angle de rotation φ du vecteur $f(i\omega)$, sera $\varphi = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

Il est clair que pour la stabilité de la solution de l'équation (1) il faut et il suffit que $m = 0$.

Critère de Mikhaïlov. *Pour que la solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation* (1) *soit stable il faut et il suffit*: 1) que le vecteur $f(i\omega)$ tourne d'un angle $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire fasse $\frac{n}{4}$ tours en sens *antihoraire* lorsque ω varie de 0 à $+\infty$; 2) que l'hodographe de $f(i\omega)$ ne passe pas par l'origine (0,0) lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

Il en résulte que pour la stabilité de la solution de l'équation (1) *il faut* que toutes les racines des équations $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ soient réelles et alternées, c'est-à-dire qu'entre deux racines, quelles qu'elles soient, d'une équation doit se trouver une racine de l'autre équation.

Exemple. Etudier la stabilité de la solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation $y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0$.

Solution. Formons le polynôme caractéristique

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Puis,

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1, \quad u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$
$$v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Construisons la courbe (fig. 46)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases} \quad 0 \leqslant \omega < +\infty$$

ω	0	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
u	1	0	-2	0
v	0	+	0	−

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

L'angle de rotation du rayon-vecteur est $\varphi = 4\frac{\pi}{2} = (n-2m)\frac{\pi}{2}$. On en tire $n - 2m = 4$ et puisque $n = 4$ on a $m = 0$, c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation caractéristique se situent dans le demi-plan à gauche. La solution triviale $y \equiv 0$ est donc asymptotiquement stable.

En se servant du critère de Mikhaïlov, étudier la stabilité de la solution nulle des équations suivantes:

942. $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0.$
943. $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$
944. $2y^{IV} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0.$
945. $3y^{IV} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0.$
946. $2y^{IV} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0.$
947. $y^{IV} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0.$
948. $y^{V} + 13y^{IV} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0.$
949. $y''' + y = 0.$
950. $y^{IV} + y''' + y' + y = 0.$
951. $y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$
952. $y^{V} + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = 0.$
953. $2y^{IV} + 11y''' + 21y'' + 16y' + 4y = 0.$
954. $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} + y'' + y' + y = 0.$

955. $2y^{IV} + 9y''' + 32y'' + 54y' + 20y = 0.$
956. $6y^{IV} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0.$
957. $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0.$
958. $y^{VI} + y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 2y = 0.$
959. $y^{V} + 2y^{IV} + y''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$

§ 32. Equations à petit paramètre de la dérivée

Considérons une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), \varepsilon), \tag{1}$$

où ε est un paramètre.

Si dans un certain domaine fermé de variation de t, x, ε la fonction $F(t, x, \varepsilon)$ est continue par rapport à tous les arguments et satisfait à une condition de Lipschitz en x:

$$|F(t, x_2, \varepsilon) - F(t, x_1, \varepsilon)| \leqslant N\,|x_2 - x_1|,$$

où N est indépendant de t, x, ε, alors la solution de l'équation (1) dépend continûment de ε.

Dans de nombreux problèmes de physique on est amené à considérer les équations de la forme

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{2}$$

où ε est un petit paramètre.

En divisant les deux membres de l'équation (2) par ε, on la ramène à la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(t, x), \tag{3}$$

qui montre que le second membre de (3) présente une discontinuité pour $\varepsilon = 0$, de sorte que le théorème sur la dépendance linéaire des solutions en fonction du paramètre ε ne s'applique pas dans le cas considéré.

La question se pose ainsi : à quelles conditions, les valeurs de $|\varepsilon|$ étant petites, peut-on rejeter dans l'équation différentielle (2) le terme $\varepsilon \frac{dx}{dt}$ et prendre pour solution approchée de cette équation la solution d'une équation dite « dégénérée » :

$$f(t, x) = 0. \tag{4}$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\varepsilon > 0$ et que l'équation dégénérée (4) possède une seule solution $x = \varphi(t)$. Suivant le comportement de $f(t, x)$ au voisinage de la solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (4),

la solution $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (2) tend vers la solution $x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée lorsque $\varepsilon \to 0$ ou bien s'en éloigne rapidement. La solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (4) est dite *stable* dans le premier cas et *instable* dans le second cas.

A savoir si, en passant par la courbe solution $x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée (4), la fonction $f(t, x)$ change le signe + en — lorsque

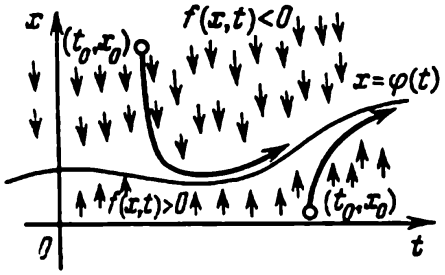

Fig. 47

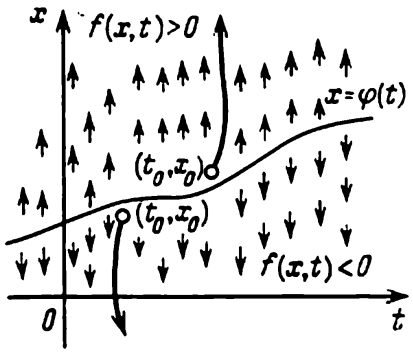

Fig. 48

x croît pour t fixe, la solution $x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée (4) est stable et donc peut remplacer de façon approchée la solution $x(t, \varepsilon)$ de l'équation (2) (fig. 47).

Au contraire, si la fonction $f(t, x)$ change le signe — en +, la solution $x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée (4) est instable et la solution $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (2) ne peut pas être remplacée par la solution de l'équation dégénérée (4) (fig. 48).

Les conditions suffisantes de stabilité ou d'instabilité s'expriment par les propositions suivantes:

1. *Si* $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} < 0$ *pour la solution* $x = \varphi(t)$ *de l'équation* (4), *alors la solution* $x = \varphi(t)$ *de l'équation dégénérée est stable*;

2. *Si* $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} > 0$ *pour la solution* $x = \varphi(t)$ *de l'équation* (4), *alors la solution* $x = \varphi(t)$ *de l'équation dégénérée est instable.*

Dans le cas où l'équation dégénérée $f(t, x) = 0$ (4) possède plusieurs solutions $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, on doit étudier la stabilité de chacune de ces solutions. Dans ces conditions, le comportement des courbes intégrales de l'équation différentielle (2) peut être différent, lorsque $\varepsilon \to 0$, suivant le choix des conditions initiales, c'est-à-dire du point initial (t_0, x_0).

Un cas semi-stable peut aussi se présenter où la fonction $f(t, x)$ ne change pas de signe au passage à travers la courbe $x = \varphi(t)$ (par exemple si $x = \varphi(t)$ est une racine de multiplicité paire de l'équation dégénérée (4)). Dans ce cas, lorsque ε est petit, les courbes intégrales de l'équation (2) tendent vers la courbe $x = \varphi(t)$ d'un côté de cette courbe et s'en éloignent de l'autre côté.

Dans le premier cas on dit que le point initial (t_0, x_0) appartient au domaine d'attraction de la solution semi-stable $x = \varphi(t)$ et dans le second cas, qu'il appartient au domaine de répulsion.

Dans le cas semi-stable, la solution de l'équation donnée (2) ne peut pas, en règle générale, être remplacée par celle de l'équation dégénérée (4).

Il existe des critères permettant d'établir dans quelles conditions, le point initial (t_0, x_0) étant convenablement choisi, les courbes intégrales de l'équation (2) se rapprochent de la solution

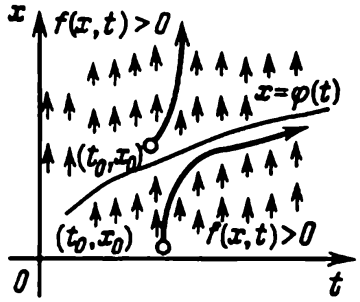

Fig. 49

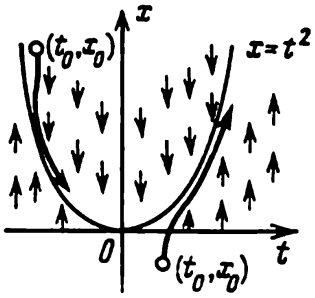

Fig. 50

$x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée et restent dans son voisinage pour $t > t_0$, mais ceci n'est valable que lorsque l'équation (2) n'est pas soumise à des perturbations.

Indiquons ces critères.

Supposons que dans le voisinage de la solution semi-stable $x = \varphi(t)$ de l'équation dégénérée (4) la fonction $f(t, x) \geqslant 0$. Si $\varphi'(t) > 0$, les courbes intégrales de l'équation (2), qui se rapprochent de la courbe $x = \varphi(t)$, ne peuvent pas couper cette courbe et restent dans son voisinage pour $t > t_0$ (le point initial (t_0, x_0) doit se situer dans le domaine d'attraction de la solution semi-stable $x = \varphi(t)$); si (t_0, x_0) se trouve dans le domaine de répulsion, la courbe intégrale correspondante de l'équation (2) s'éloigne rapidement de la courbe $x = \varphi(t)$ (fig. 49). Si $\varphi'(t) < 0$, les courbes intégrales qui se rapprochent du graphique de la fonction $x = \varphi(t)$ le coupent et, de l'autre côté de la courbe $x = \varphi(t)$, s'en éloignent rapidement. Si $\varphi'(t) > 0$ pour $t_0 \leqslant t < t_1$ et $\varphi'(t) < 0$ pour $t > t_1$ et si ε est suffisamment petit, les courbes intégrales issues du point (t_0, x_0) appartenant au domaine d'attraction de la solution $x = \varphi(t)$ restent dans le voisinage de la courbe $x = \varphi(t)$ pour $t_0 + \delta < t < t_1$, $\delta > 0$; elles coupent la courbe $x = \varphi(t)$ au voisinage du point $t = t_1$ et ensuite s'en éloignent.

Si, dans le voisinage de la solution semi-stable $x = \varphi(t)$ la fonction $f(t, x) \leqslant 0$, les assertions énoncées ci-dessus restent vraies à condition d'inverser le signe de la dérivée $\varphi'(t)$.

Exemple 1. Etablir si la solution $x = x(t, \varepsilon)$ de l'équation $\varepsilon \frac{dx}{dt} = t^2 - x$ (5), $\varepsilon > 0$, satisfaisant à la condition initiale $x|_{t=t_0} = x_0$ tend vers la solution de l'équation dégénérée $x = t^2$ pour $t > t_0$ et $\varepsilon \to 0$.

Solution. On a $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial (t^2 - x)}{\partial x} = -1 < 0$ si bien que la solution de l'équation dégénérée $x = t^2$ est stable et donc la solution de l'équation initiale $x = x(t, \varepsilon)$ issue de tout point initial (t_0, x_0) tend vers la solution de l'équation dégénérée lorsque $\varepsilon \to 0$ et $t > t_0$ (fig. 50).

On peut s'en assurer par une vérification directe. En résolvant l'équation différentielle (5) comme une équation linéaire non homogène pour la condition initiale donnée $x|_{t=t_0} = x_0$, on trouve

$$x(t, \varepsilon) = (x_0 - t_0^2 + 2\varepsilon t_0 - 2\varepsilon^2)\, e^{-\frac{t-t_0}{\varepsilon}} + t^2 - 2\varepsilon t + 2\varepsilon^2,$$

d'où on tire immédiatement que pour $t > t_0$, c'est-à-dire pour $t - t_0 > 0$ et $\varepsilon \to 0$, on a $x(t, \varepsilon) \to t^2$.

Exemple 2. Etudier la stabilité de la solution de l'équation dégénérée de l'équation

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(e^x - 2).$$

Solution. L'équation dégénérée $x(e^x - 2) = 0$ possède deux solutions

1) $x = 0$, 2) $x = \ln 2$.

On a

$$\left.\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = (e^x - 2 + xe^x)|_{x=0} = -1,$$

si bien que la solution $x = 0$ est stable;

$$\left.\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|_{x=\ln 2} = (e^x - 2 + xe^x)|_{x=\ln 2} = 2 \ln 2 > 0,$$

de sorte que la solution $x = \ln 2$ de l'équation dégénérée est instable (fig. 51).

Exemple 3. Etudier la stabilité de la solution de l'équation dégénérée correspondant à l'équation $\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)^2$. L'équation dégénérée $(x - t)^2 = 0$ a une racine $x = t$ de multiplicité 2. Dans le voisinage de cette racine, la fonction $f(t, x) \equiv (x - t)^2 > 0$, $\varphi(t) = t$ et $\varphi'(t) = 1 > 0$. Par conséquent, la solution $x = t$ est semi-stable et, si le point initial (t_0, x_0) se situe dans le demi-plan au-dessous de la droite $x = t$ (le domaine d'attraction de la racine

$x = t$), la courbe intégrale $x = x(t, \varepsilon)$ ayant pour origine le point (t_0, x_0) restera pour $t > t_0$ dans le voisinage de la droite $x = t$ (fig. 52).

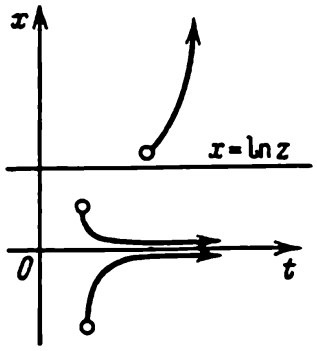

Fig. 51

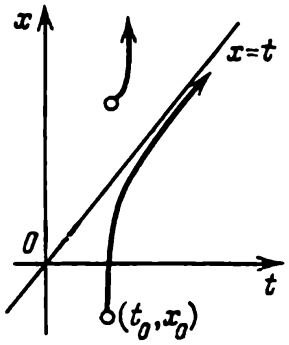

Fig. 52

Etudier la stabilité de la solution des équations dégénérées pour les équations différentielles suivantes:

960. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x - t^2$.

961. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x(t^4 + 1 - x)$.

962. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x - t)(x - e^t)$.

963. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x^2 - t^2$.

964. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = xt$.

965. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x - t)(\ln x - t^2 - 1)$.

966. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (t + x)^2$.

967. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x - t + 1$.

968. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x - \sin t)(1 - t^2)$.

969. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4x - 5$.

970. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x - t) \ln x$.

971. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (\ln x + t)^2$.

RÉPONSES

1. Si $y(x)$ est solution de l'équation différentielle, elle transforme celle-ci en une identité. Par voie de conséquence, si les équations a) et b) ont des solutions coïncidentes, les premiers membres et donc les seconds membres de ces équations sont identiquement égaux : $y^2 + 2x - x^4 = -y^2 - y + 2x - x^2 + x^4$. Il en résulte que $y = x^2$, $y = -x^2 - \frac{1}{2}$. La deuxième fonction ne vérifie pas l'équation a), elle doit donc être rejetée. On obtient : $y = x^2$. **13.** $y \equiv 0$. **17.** $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. **18.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **19.** Les points extrémaux des courbes intégrales se situent sur la droite $x = -1$. **20.** Les points d inflexion des courbes intégrales se situent sur la parabole $y = x^2 + 2x$.

21.

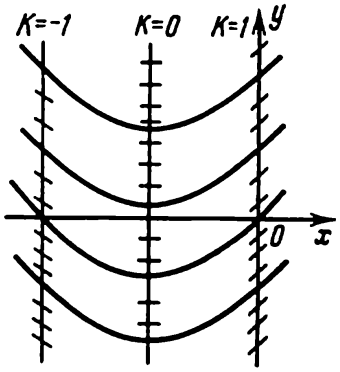

Fig. 53

22.

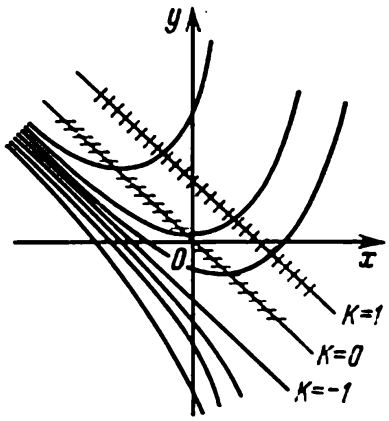

Fig. 54

23.

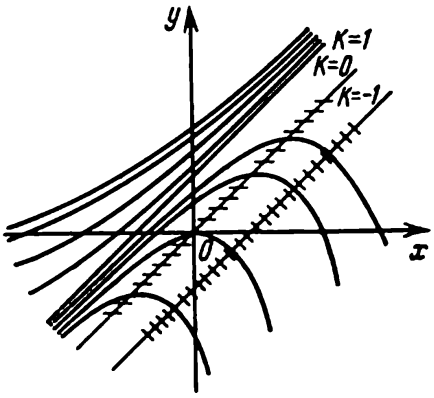

Fig. 55

24.

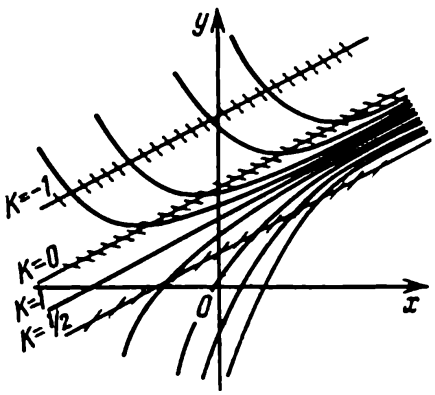

Fig. 56

25.

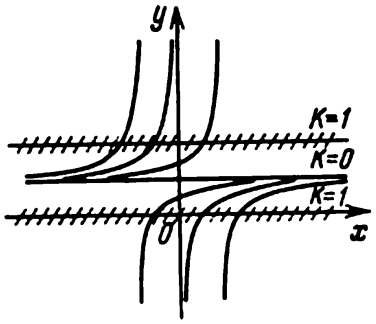

Fig. 57

26.

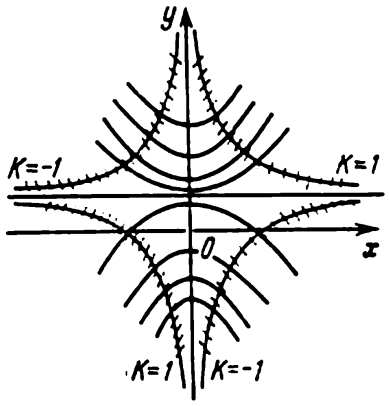

Fig. 58

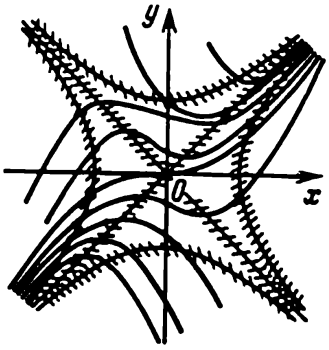

Fig. 59

28.

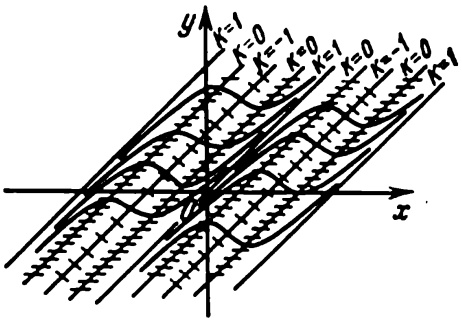

Fig. 60

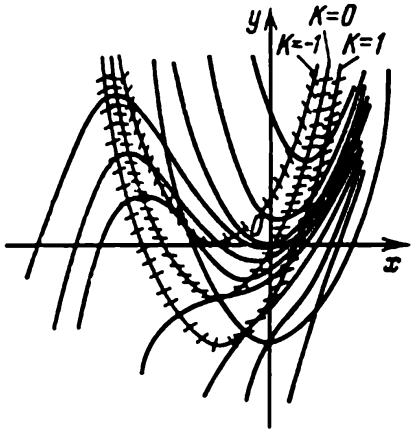

Fig. 61

30.

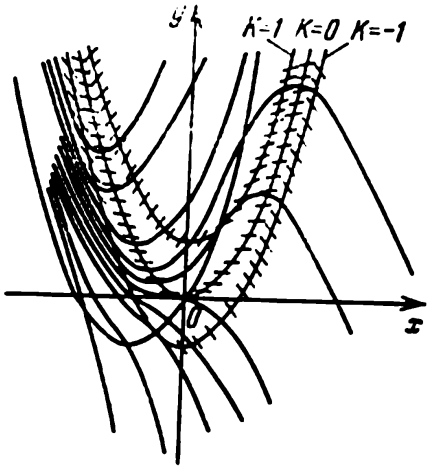

Fig. 62

31.

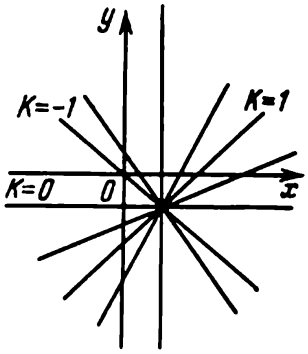

Fig. 63

32.

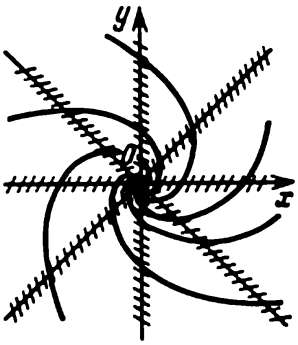

Fig. 64

41. $y_0(x)=0$, $y_1(x)=\frac{1+x^3}{3}$, $y_2(x)=\frac{1}{126}(33-14x+42x^3-$ $-7x^4-2x^7)$. 42. $y_0x=0$, $y_1(x)=\frac{x^2}{2}$, $y_2(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}$.

43. $y_0(x)=1$, $y_1(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$, $y_2(x)=1+x+x^2+\frac{x^3}{6}$.

44. $y_0(x)=2$, $y_1(x)=2+x-\frac{2}{3}x^3$, $y_2(x)=2+x+x^2-\frac{2}{3}x^3-$ $-\frac{1}{4}x^4$.

45. $y_0(x)=2$, $y_1(x)=2x-\ln x$, $y_2(x)=2+\ln^2 x$.

46. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\widetilde{C}$ ou $x+y=C(1-xy)$.

47. $x^2(1+y^2)=C$. 48. $y=\sin x$. 49. $y=\operatorname{tg}\ln Cx$.

50. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 51. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$, $y=1$. 52. $e^x=C(1-e^{-y})$.

53. $y=1$. 54. $a^x+a^{-y}=C$. 55. $1+e^y=C(1+x^2)$.

56. $y=\sin[C+\ln(1+x^2)]$. 57. $\operatorname{arctg} e^x=\frac{1}{2\sin^2 y}+C$.

58. $y=(1+Cy+\ln y)\cos x$. 59. $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

60. $b(ax+by+c)+a=Ce^{bx}$.

61. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$. 62. $y=-\frac{1}{x}$.

63. $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$. 64. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=e^{2\sin x}$.

65. $y'=3y$, $y=-2e^{3x}$.

66. $\int\limits_0^x y\,dt=a^2\ln\frac{y}{a}$; $y=\frac{a^2}{a-x}$(hyperbole).

67. $\frac{dv}{dt}=20\frac{t}{v}$, $v=50\sqrt{29}$ cm/s.

69. $m\frac{dv}{dt}=kv^2$, $t=\frac{h(v_1-v_0)}{v_0v_1\ln\frac{v_1}{v_0}}=\frac{3}{40\ln 2{,}5}$ s.

70. $m\frac{dv}{dt}=-kv$; $t=-\frac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ s. 72. $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$; $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; $t=60$ mn.

73. $y'=n\frac{y}{x}$; $y=Cx^n$. 74. $\frac{dS}{dt}=kS$; $S=25\cdot 2^{t/5}$.

75. 18,1 kg; $\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{300}\right)$, k — coefficient de proportionnalité.

76. 5,2 kg ; $\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{10-x}{90}-\frac{1}{3}\right)$.

77. $xy=C$. $(C\neq 0)$. **78.** 0,82 kg ; $\frac{ds}{dt}=ks(s+6)$.

79. 32,2 mn. **80.** $T=\frac{2}{3}x$; 864 000·4,2 J ;

$\frac{dT}{dx}=-\frac{Q}{kS}$, où $Q=$ const. **83.** $y=0$, pour $\alpha\leqslant 1$ la solution est unique.

85. $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)x+C$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

86. $y=C$. **87.** $y=(-1)^n(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})+$
$+n\pi x+C$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **88.** $y=e^x+C$.

89. $y=n\pi x+C$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

90. $y=x(\ln x-1)+C$. **91.** $y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+$
$+n\pi x+C$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

92. $y=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}\right)+5\pi$.

93. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\pi$.

94. $y=2\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)+\frac{9\pi}{2}$.

95. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)+\frac{7}{2}\pi$.

96. $y=0$. **97.** $y=1$. **98.** $y=-\pi$.

99. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}+\frac{9}{4}\pi$. **100.** $\operatorname{tg}\frac{y}{x}=\ln Cx$.

101. $y=x(C-\ln x)$. **102.** $y=xe^{1+Cx}$.

103. $(x-y)\ln Cx=x$. **104.** $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$, $y=x$,
$y=-x$. **105.** $2x=(x-y)\ln Cx$.

106. $y^2-3xy+2x^2=C$. **107.** $y^2+2xy-x^2=C$.

108. $y=1+(x-1)\ln C(x-1)$.

109. $(x+y-1)^2(x-y-1)^2=C$.

110. $y^2-2xy-x^2-8y+4x=C$. **111.** $y^2-2xy-x^2+4y=C$.

112. $y^2+3xy+x^2-5x-5y=C$. 113. $(4x+2y+1)^2=$ $=4x+C$. 114. $x+3y-\ln|x-2y|=C$.

115. $(x+y-1)^2+2x=C$. 116. $y^2=x\ln Cy^2$.

117. $Cx^4=y^6+x^3$. 118. $\sqrt{x^2y^4+1}=Cx^2y^2-1$.

119. $2\operatorname{arctg}\frac{y^3}{x}=\ln(x^2+y^6)+C$. 120. $x^2+y^2=Cx$.

121. $y=\frac{1}{2}\left(Cx^{1-k}-\frac{1}{C}x^{1+k}\right)$.

122. $y^2=2Cx+C^2$. 123. $y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\frac{1}{C}\right)$.

124. $x^2+y^2=Cx^4$. 125. $y=Ce^{-2x}+e^{-x}$.

126. $y=x-x^2$. 127. $y=(C+x^2)e^{x^2}$.

128. $y=(C+x)e^{-x^2}$. 129. $y=\frac{x^2}{\cos x}$.

130. $y=Cx^2+x^2\sin x$. 131. $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

132. $y=(C+x^3)\ln x$. 133. $x=Cy-\frac{y^2}{2}$. 134. $y=1$.

135. $x=\frac{C}{y}+y\ln y$. 136. $x=(C+y)e^{-\frac{y^2}{2}}$.

137. $y=(C+x^2)e^{e^x}$. 138. $y=(C+x)e^{(1-x)e^x}$.

139. $i(t)=\frac{E_0}{R^2+(2n\pi L)^2}[R\sin 2n\pi t+2n\pi L(e^{-\frac{Rt}{L}}-\cos 2n\pi t)]+$ $+I_0e^{-\frac{Rt}{L}}$. 140. $q=QE(1-e^{-t/QR})$;

$R\frac{dq}{dt}=E-\frac{q}{Q}$. 141. $v=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}+\frac{m}{k_2}e^{-\frac{k_2t}{m}}\right)$;

$m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$, $v(0)=0$.

142. $y=Cx-x^2$; $y-xy'=x^2$. 143. $y=C\sqrt{x}-x$;

$y-xy'=\frac{x+y}{2}$. 144. $y(x)=y_1(x)+Ce^{-\int p(x)\,dx}$.

145. $y=y_1(x)+C[y_2(x)-y_1(x)]$. 148. $y=2^{\sin x}$.

149. $y=e^{-x}$. 150. $y=\frac{\sin x}{x}$. 151. $y=\frac{x+1}{x\cos\frac{1}{x}}$.

152. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$. 153. $y=e^x+e^{\frac{1}{x}}$. 154. $y=x$.

155. $y=\frac{x}{\sin x}$. 156. $y=\cos x$. 157. $y=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$.

158. $y^3=x^3+Cx^2$. 159. $x^3e^{-y}=C+y$. 160. $y=\frac{e^{-x^2}}{C-x}$.

161. $\sqrt{y}+1=Ce^{e^x}$. 162. $y^2\ln x=C+\sin x$.

163. $y^2(C-x)\sin x=1$. 164. $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$.

165. $y=\frac{1}{Ce^{-\sin x}-1}$. 166. $\sin y=(x+C)e^x$, $z=\sin y$.

167. $\ln y=(x+C)e^x$, $z=\ln y$. 168. $\sin y=x+Ce^{-x}$, $z=\sin y$. 169. $x-2+Ce^{-x}=e^{y^2/2}$, $z=e^{y^2/2}$.

170. $\operatorname{tg} y=(C+x^2)e^{-x^2}$; $z=\operatorname{tg} y$. 171. $xy=C$.

172. $y=(x+1)e^x$. 173. $y=2-(2+a^2)e^{\frac{x^2-a^2}{2}}$.

174. $y=Cx^{\frac{1-n}{n}}$. 175. $x^4+x^2y^2+y^4=C$.

176. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$. 177. $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+$ $+\frac{x}{y}=C$. 178. $x^3\operatorname{tg} y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$.

179. $x^3y+x^2-y^2=Cxy$. 180. $\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C$.

181. $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=C$. 182. $y\sqrt{1+x^2}+$ $+x^2y-y\ln x=C$. 183. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$.

184. $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C$. 185. $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$.

186. $y=x$. 187. $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=C$.

188. $xy(x^2+y^2)=C$. 189. $xy^2-2x^2y-2=Cx$; $\mu=1/x^2$.

190. $x-\frac{y}{x}=C$; $\mu=\frac{1}{x^2}$. 191. $x\ln|x|-y^2=Cx$; $\mu=1/x^2$.

192. $5\operatorname{arctg} x+2xy=C$; $x=0$; $\mu=\frac{1}{1+x^2}$.

193. $y^3+x^3(\ln x-1)=Cx^2$; $\mu=1/x^4$.

194. $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C$; $\mu=e^x$.

195. $x^2-\frac{7}{y}-3xy=C$; $\mu=1/y^2$. 196. $(x+y^2)^2C=x-y^2$; $\mu=\frac{1}{(x+y^2)^3}$. 197. $1+y^2-x^2=Cx$; $\mu_2=1/x^2$; $\mu_1=\frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$. 198. $y-1=C\sqrt{x^2+y^2}$;

$\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$. **199.** $(y-C)^2=x^3$.

200. $\ln Cy=x\pm 2e^{\frac{x}{2}}$, $y=0$. **201.** $y=2x^2+C$, $y=-x^2+C$.

202. $xy=C$, $x^2y=C$. **203.** $y=\frac{x^2}{2}+C$, $y=Ce^x-x-1$.

204. $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C$. **205.** $y=\frac{x^2}{2}+C$,

$y=-\frac{x^2}{2}+C$, $y=Ce^x$. **206.** $y=Ce^x+\frac{1}{C}$, $y=\pm 2e^{x/2}$.

207. $y=Cx+\frac{1}{2}(x^2-C^2)$, $y=x^2$.

208. $\begin{cases} x=e^p(p+1)+C, \\ y=p^2e^p, \ y=0. \end{cases}$ **209.** $\begin{cases} x=\ln|\ln p|+\frac{1}{\ln p}+C, \\ y=\frac{p}{\ln p}. \end{cases}$

210. $\begin{cases} x=\ln p+\sin p, \\ y=C+p(1+\sin p)+\cos p. \end{cases}$

211. $\begin{cases} x=p^2-2p+2, \\ y+C=\frac{2}{3}p^3-p^2. \end{cases}$ **212.** $\begin{cases} x+C=\frac{(\ln p+1)^2}{2}, \\ y=p\ln p. \end{cases}$

213. $\begin{cases} x=e^p+C, \\ y=(p-1)e^p; \ y=-1. \end{cases}$ **214.** $\begin{cases} x=\frac{e^{1/p}}{p^2}, \\ y=C+e^{1/p}\left(1+\frac{1}{p}\right). \end{cases}$

215. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y+C=-a\sin^3 t, \ p=\operatorname{tg} t. \end{cases}$

216. $\begin{cases} x=5\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t\right)+C, \\ y=a\sin^5 t. \end{cases}$

217. $\begin{cases} x=p+\sin p, \\ y+C=\frac{1}{2}p^2+p\sin p+\cos p. \end{cases}$

218. $\begin{cases} x+C=\ln|p|+\sin p+p\cos p, \\ y=p+p^2\cos p. \end{cases}$

219. $\begin{cases} x+C=2\operatorname{arctg} p-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}\right|, \\ y=\arcsin p+\ln(1+p^2), \\ y=0. \end{cases}$

220. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}, \\ y = \dfrac{2C}{p} + \ln p - 2. \end{cases}$

221. $\begin{cases} x = 2(1-p) + C\,e^{-p}, \\ y = [2(1-p) + C\,e^{-p}](1+p) + p^2. \end{cases}$

222. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\cos p}{p^2} - \dfrac{\sin p}{p}, \\ y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{2\cos p}{p} - \sin p, \end{cases}$

$y = 0.$

223. $\begin{cases} x = \dfrac{Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2}, \\ y = \dfrac{Cp^2 + 2p - 1}{2(p-1)^2} - \dfrac{1}{p}. \end{cases}$

224. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^3} - 2\,e^p\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}\right), \\ y = \dfrac{3C}{2p^2} - 2\,e^p\left(1 - \dfrac{3}{p} + \dfrac{3}{p^2}\right). \end{cases}$

225. $y = Cx + \dfrac{a}{C^2}$; $4y^3 = 27ax^2$. 226. $y = Cx + C^2$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$. 227. $y = Cx - \dfrac{C-1}{C}$; $(y+1)^2 = 4x$.

228. $y = Cx + a\sqrt{1+C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$.

229. $x = Cy + C^2$; $4x = -y^2$. 230. $xy = \pm a^2$.

231. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 232. $y = e^x + \dfrac{1}{C + e^x}$.

233. $y = \sin x + \dfrac{1}{C+x}$. 234. $y = x + \dfrac{1}{Cx+1}$.

235. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(C - \ln x)\,x}$. 236. Dans ce cas

$\dfrac{dy}{dx} = -[a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x)]$;

$\dfrac{dy}{dx} = -\,c(x)\left[\dfrac{a(x)}{c(x)}\,y^2 + \dfrac{b(x)}{c(x)}\,y + 1\right]$;

$\dfrac{dy}{dx} = -\,c(x)\left(\dfrac{m}{p}\,y^2 + \dfrac{n}{p}\,y + 1\right)$ et les variables se séparent. On a: $C - \int c(x)\,dx = \dfrac{1}{p}\int \dfrac{dy}{my^2 + ny + p}$.

238. $y + xy' = 0$. 239. $x^2 + y^2 = 2xyy'$.

240. $xy' = y \ln y'$. **241.** $y'^2 + y' - xy' + y = 0$.

242. $y'' - 2y' + y = 0$. **243.** $yy'^2 + 2xy' = y$.

244. $y''' = 0$. **245.** $y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$. **246.** $y''^2 = (1 + y'^2)^3$.

247. $y'' - y = 0$. **248.** $y'' + y = 0$. **249.** $2x^2 + y^2 = C$.

250. $x^2 + ny^2 = C$. **251.** $2x + \sigma y^2 = C$. **252.** $\sin y = C\,e^{-x}$.

253. $y^2 = Cx$. **254.** $xy = C$. **255.** $y = Cx$, si $k = 2$;

$\frac{1}{x^{k-2}} - \frac{1}{y^{k-2}} = \frac{1}{C^{k-2}}$, si $k \neq 2$.

256. $x^2 + y^2 = Cx$. **257.** $xy^3 = C$. **258.** $\rho = C(1 - \cos\varphi)$.

259. $y = C\,e^{-x/2}$. **260.** $y^2 = 4x + 4$. **261.** $y = 0$.

262. $y = 0$, $y = \frac{4}{27} x^3$. **263.** Pas de solutions singulières.

264. $a = 0$, $y = 0$. **265.** $4y + x^5 = 0$. **266.** $4xy^2 + 1 = 0$.

267. $y = x - \frac{4}{27}$. **268.** Pas de solutions singulières.

269. $y = x^2/4$. **270.** $y = 0$; $y = 4x$. **271.** $y = \pm 1$.

272. $y = \pm 2\,e^{x/2}$. **273.** $y = x$, $y = -x/3$.

274. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **275.** $y = x - \frac{1}{x + C}$.

276. $y = C\frac{\sin x}{x} + \cos x$. **277.** $y^{1-n} = 2\sin x + \frac{2}{n-1} + Ce^{(n-1)\sin x}$.

278. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$.

279. $15x^2y - 24xy^2 - 12x^3 + 2y^3 = C$.

280. $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C$. **281.** $2 + xy\ln^2 x = Cxy$;

$\mu = \frac{1}{x^2y^2}$. **282.** $y = C\,e^{-x^2} + (\sin x - x\cos x)\,e^{-x^2}$.

283. $x = C\,e^{2y} + \frac{y^2 + y}{2} + \frac{1}{4}$. **284.** $y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\ln|1 - x|$.

285. $y^2 = Cx^2 + x^4$.

286. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$. **287.** $y = C(2x - 1) + \frac{1}{x}$.

288. $x + y - 1 = C\,e^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$. **289.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\cos\frac{x}{2}$.

290. $y = C(3x^2 - 2x)$. **291.** $y^3 = Cx^3 + x^4$.

292. $x + y\,e^{\frac{x}{y}} = 1 + e$. **293.** $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C$.

294. $\ln|2x-2y+5|-2(x+y-2)=C$. 295. $x^2y+2x=Cy$.

296. $x^2+y^2=C\,e^{-x}$. 297. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1}-$

$$-\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)=C.$$

298. $x=y^2(1+C\,e^{1/y})$. 299. $\sin x+2y\ln|y|-Cy=0$.

300. $3\,e^{-2y}=C\,e^{-2x}-2\,e^{x}$.

301. $x^4+y^2=C(x^2+y)$. 302. $\frac{1}{x}=\frac{C}{y^2}+\frac{y^n}{n+2}$; $n\neq-2$.

303. $7(3y-4x)+(4a^2-3b^2)\ln|7(x+y)+a^2+b^2|=C$.

304. $x\,e^{\frac{y^2}{x}}=C$. 305. $y(1+x+\ln x)=1$.

306. $y[\sin(\ln y)+\cos(\ln y)]=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$.

307. $\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)^3=C\left(3y-1+\sqrt{9y^2-6y+2}\right)$.

308. $(x-y)(x+7y-4)=C$. 309. $x+2y+3\ln|x+y-2|=5$.

310. $y^2=C\,e^{y^2/x}$. 311. $2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}+\ln C(y+2)=0$.

312. Lors du passage de la courbe donnée à la courbe symétrique par rapport au point $O(0, 0)$, les variables x, y, y' changent en $-x$, $-y$, y' si bien que l'équation donnée est de nouveau vérifiée. 313. Pour que la droite $y=kx+b$ soit une courbe intégrale de l'équation donnée il faut et il suffit, en raison de l'égalité $y'=k$, que $y=kx+b\equiv k+xk^2$, c'est-à-dire que $k=0$ ou $k=1$ et $b=k$. On en tire deux solutions: $y=0$ et $y=x+1$. 314. $3y^2-2x=C$.

315. $y=\operatorname{ch}x$ et $y=1$. 317. a) non ; b) non ; c) oui.

327. $y=\frac{x^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$.

328. $y=\frac{x^4}{24}-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

329. $y=\frac{1}{12(x+2)^3}$. 330. $y=(x-2)\,e^{x}+x+2$.

331. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{5}{18}x^3+C_1x+C_2$.

332. $y=C_1x^2+C_2$. 333. $y=C_1\ln|x|+C_2$.

334. $y=C_1\,e^{x^2}+C_2$. 335. $y=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$.

336. $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$. 337. $y=(C_1x-C_1^2)\,e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$.

338. $y=\frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}$. 339. $y=C_3+C_2x-\sin(x+C_1)$.

340. $y=C_1x^3+C_2x+C_3$. 341. $y=\operatorname{ch}(x+C_1)+C_2$.

342. $y=C_2-\ln|C_1-x|$. 343. $y=C_2-\cos(C_1+x)$.

344. $y=C_2-\ln|\cos(C_1+x)|$. 345. $y=\frac{(x+C_1)^3}{12}-x+C_2$.

346. $y=x$. 347. $y=-2x$. 348. $y=C_2-\ln|1-e^{x+C_1}|$.

349. $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=9$.

350. $y=(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$. 351. $y=C_2e^{C_1x}$.

352. $y=\frac{1}{1-x}$. 353. $y=\left(1+\frac{x}{3}\right)^3$.

354. $y=\frac{4}{(x+4)^2}$. 355. $y^2=C_1x+C_2$.

356. $y=\frac{1}{C_1}(1+C_2e^{C_1x})$. 357. $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1}$.

358. $y=\frac{1}{C_1}\left[1+\frac{(C_1x+C_2)^2}{4}\right]$. 359. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

360. $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$. 361. $y=-\ln|x-1|$.

362. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. 363. $y=\frac{4}{(x-2)^2}$.

364. $(x-C_1)^2-C_2y^2+kC_2^2=0$.

365. Parabole. 366. $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x^2}$, où x est la distance du corps au centre de la Terre; $t\approx 122$ h.

367. $m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{x^3}$; $x^2=\frac{a^2}{C_1}(t+C_2)^2+C_1$; $a^2=\frac{k}{m}$.

368. $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$;

$$x=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\alpha t;\quad \alpha=\sqrt{\frac{kg}{m}}.$$

369. $Cx=y^{2k-1}$ $(k>1/2)$. 370. $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R$, où $R=\text{const}$. 371. Oui. 372. Non. 373. Non. 374. Oui. 375. Oui. 376. Oui. 377. Non. 378. Non. 379. Non. 380. Non. 381. Non. 382. Non. 383. Non. 384. Non. 385. Oui. 386. Non. 389. 1.

390. $-\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$. 391. 0.

392. e^{-2x}. 393. 0. 394. $-8\sin^3 x$. 395. $-1/\sqrt{2}$.

396. $\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2-x^2}}$; $|x|<\pi$. 397. 0. 398. 0.

399. $1-\ln x$; $x>0$. 400. $\frac{x-1}{x^3}e^{1/x}$; $x\neq 0$. 401. $-e^{2x}$.

402. $-2e^{-6x}$. 403. 1. 404. 1. 410. $9y''-6y'+y=0$.

411. $y''+3y'+2y=0$. 412. $2y''-3y'-5y=0$.

413. $y'''+3y''+2y'=0$. 414. $y^{IV}+2y''+y=0$. 415. $y'''=0$.

416. $y''-3y'+2y=0$; $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

417. $y''-2y'+y=0$; $y=(C_1+C_2x)e^x$.

418. $y''-6y'+13y=0$; $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

419. $y'''-3y''+3y'-y=0$; $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$. 420. $y''-y=0$. 421. $y''-y'=0$. 422. $y''+4y'+4y=0$. 423. $y''+9y=0$. 424. $y''=0$. 425. $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

426. $y'''-3y''+3y'-y=0$. 427. $y'''-4y''+5y'-2y=0$.

428. $y'''-y''=0$. 429. $y'''+y'=0$. 430. $y'''-2y''+y'-2y=0$.

431. $y'''+2y''+2y'=0$.

432. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 433. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.

434. $y=e^x(1+x)$. 435. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$.

436. $y=4e^x+2e^{3x}$. 437. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$.

438. $y=C_1e^{(1-\sqrt{3})x}+C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$.

439. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$.

440. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. 441. $y=C_1e^{2x}+$ $+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$.

442. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$. 443. $y=e^x\sin x$. 444. $y=e^x(\cos\sqrt{2}x+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$. 445. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$. 446. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+e^{-x}(C_3+C_4\cos x+C_5\sin x)$. 447. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$. 448. $y=C_1+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)$. 449. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. 450. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{10}x^9$. 451. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+C_3e^{2x}$. 452. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{x/2}$. 453. $y=x+e^{-x}$. 454. $y_{\text{p.n}}=A_1x^2+A_2x+A_3$. 455. $y_{\text{p.n}}=A_1x^3+A_2x^2+A_3x$. 456. $y_{\text{p.n}}=A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2$. 457. $y_{\text{p.n}}=e^{-x}(A_1+A_2x)$. 458. $y_{\text{p.n}}=e^{-x}(A_1x+A_2x^2)$. 459. $y_{\text{p.n}}=e^{-x}(A_1x^2+A_2x^3)$. 460. $y_{\text{p.n}}=A\sin x+B\cos x$. 461. $y_{\text{p.n}}=x(A\sin x+B\cos x)$. 462. $y_{\text{p.n}}=x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 463. $y_{\text{p.n}}=x(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$. 464. $y_{\text{p.n}}=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 465. $y_{\text{p.n}}=xe^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 466. $y_{\text{p.n}}=C_1+C_2x+C_3x^2$. 467. $y_{\text{p.n}}=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. 468. $y_{\text{p.n}}=$

$= C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4$. **469.** $y_{\text{p.n}} = C_1x^3 + C_2x^4 + C_3x^5$. **470.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **471.** a) $y_{\text{p.n}} = (A_1 + A_2x + A_3x^2)\,e^{kx}$, b) $y_{\text{p.n}} = (C_1x + C_2x^2 + C_3x^3)\,e^{kx}$, c) $y_{\text{p.n}} = (C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4)\,e^{kx}$, d) $y_{\text{p.n}} = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,e^{kx}$, e) $y_{\text{p.n}} = (C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4)\,e^{kx}$, f) $y_{\text{p.n}} = (C_1x^3 + C_2x^4 + C_3x^5)\,e^{kx}$. **472.** a) $y_{\text{p.n}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, b) $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. **473.** a) $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)\,e^{3x}$, b) $y_{\text{p.n}} = x^2(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,e^{3x}$. **474.** $y_{\text{p.n}} = Cx$. **475.** $y_{\text{p.n}} = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **476.** $y_{\text{p.n}} = Ce^x$. **477.** $y_{\text{p.n}} = Cxe^{-7x}$. **478.** $y_{\text{p.n}} = (C_1x^2 + C_2x^3)\,e^{4x}$. **479.** $y_{\text{p.n}} = Cx^2e^{5x}$. **480.** $y_{\text{p.n}} = (C_1x + C_2x^2)\,e^{\frac{3}{4}x}$. **481.** $y_{\text{p.n}} = (C_1x + C_2x^2)\,e^{4x}$. **482.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$. **483.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **484.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. **485.** $y_{\text{p.n}} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,e^{2x}$. **486.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,e^{2x}$. **487.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,e^{-3x}$. **488.** $y_{\text{p.n}} = x(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)$. **489.** $y_{\text{p.n}} = C$ ($C = \text{const}$). **490.** $y_{\text{p.n}} = C_1 + C_2x$. **491.** $y_{\text{p.n}} = C$ ($C = \text{const}$). **492.** $y_{\text{p.n}} = Cx$. **493.** $y_{\text{p.n}} = Cx^2$. **494.** $y_{\text{p.n}} = C$ ($C = \text{const}$). **495.** $y_{\text{p.n}} = Cx$. **496.** $y_{\text{p.n}} = Cx^2$. **497.** $y_{\text{p.n}} = Cx^3$. **498.** $y_{\text{p.n}} = Cx^2$. **499.** $y_{\text{p.n}} = Ce^{4x}$. **500.** $y_{\text{p.n}} = Cx^2e^{-x}$. **501.** $y_{\text{p.n}} = (C_1x^2 + C_2x^3)\,e^{-x}$. **502.** $y_{\text{p.n}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. **503.** $y_{\text{p.n}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **504.** $y_{\text{p.n}} = (A_1 + A_2x) \sin 2x + (B_1 + B_2x) \cos 2x$. **505.** $y_{\text{p.n}} = x^2(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$. **506.** $y_{\text{p.n}} = C \cos nx + C_2 \sin nx$. **507.** $y_{\text{p.n}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. **508.** $y_{\text{p.n}} = Cx^4e^x$. **509.** $y_{\text{p.n}} = (C_1x^4 + C_2x^5)\,e^x$. **510.** $y = (C_1 + C_2x)\,e^{-x} - 2$. **511.** $y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$.

512. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$. **513.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{x^2}{2}$. **514.** $x = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2$.

515. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{6x} + \frac{1}{6}x^3$.

516. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$.

517. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4x)\,e^x + 1$.

518. $y = (C_1 + Cx)\,e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

519. $y = C_1 + C_2e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$.

520. $y=(C_1+C_2x)\,e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$. 521. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}+$ $+4x^2e^{-2x}$. 522. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}-\frac{9}{2}\,xe^{-3x}$.

523. $y=C_1+C_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-98x$. 524. $y=C_1+C_2e^{-3x}-$ $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)e^{-3x}$. 525. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}+(20x-5x^2)\,e^{-2x}$.

526. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)\,e^{-x}+\frac{x}{2}$.

527. $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{3}(x^2-x+1)\,e^x$.

528. $y=C_1e^{-(\sqrt{6}+2)x}+C_2e^{(\sqrt{6}-2)x}-\frac{16\cos 2x+12\sin 2x}{25}$.

529. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\cos x+x^2\sin x$.

530. $y=(C_1+C_2x)\,e^{mx}+\frac{2mn\cos nx+(m^2-n^2)\sin nx}{(m^2+n^2)^2}$.

531. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,e^{-x}-\frac{1}{4}\,xe^{-x}\cos 2x$.

532. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{2\cos mx+3\sin mx}{a^2-m^2}$ $(|a|\neq|m|)$.

533. $y=C_1+C_2e^x-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\,e^x$.

534. $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{1}{5}(6\sin x-2\cos x)\,e^x$.

535. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)\,e^{-2x}+5xe^{-2x}\sin x$.

536. $y=C_1+C_2e^{-2x}-\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{50}\right)\cos x+\left(\frac{7}{50}-\frac{x}{20}\right)\sin x$.

537. $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x$.

538. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{18}\left(x^2-x+\frac{7}{18}\right)e^{4x}$.

539. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$.

540. $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x-(x^2+3x+1)$.

541. $y=(C_1+C_2x)\,e^x+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^2}{4}\,e^x$.

542. $y=(C_1+C_2x)\,e^x+x^3+6x^2+18x+24$.

543. $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$.

544. $y=\left(C_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2}{4}\right)\sin x$.

545. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+[(6-x^2)\cos x+4x\sin x]\,e^{-x}$.

546. $y=C_1e^x+\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+$ $+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$. 547. $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}+\frac{1}{4}\cos x$.

548. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x-\frac{e^x}{8}\sin 2x$. 549. $y=\left(C_1\cos x+\right.$ $\left.+C_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x+x\sin x\right)e^{2x}$. 550. a) $y=x(C_1e^x+C_2e^{-x})$, b) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$, c) $y=x(C_1e^x+C_2xe^{-x})$, d) $y=C_1e^x+C_2x^3e^{-x}$.

551. $y_{\text{p. n}}=A_1e^x+A_2e^{-2x}$.

552. $y_{\text{p.n}}=x(A_1x+A_2)+Bxe^{-4x}$. 553. $y_{\text{p.n}}=A_1x+A_2+$ $+B_1\cos x+B_2\sin x$. 554. $y_{\text{p.n}}=Ae^x+xe^x(B_1\cos x+$ $+B_2\sin x)$. 555. $y_{\text{p.n}}=Ax^2+Bxe^x$. 556. $y_{\text{p.n}}=Ae^{2x}+$ $+x(B_1\cos 2x+B_2\sin 2x)$. 557. $y_{\text{p.n}}=A_1\cos x+B_1\sin x+$ $+A_2\cos 3x+B_2\sin 3x$. 558. $y_{\text{p.n}}=A_1x+B_1\cos 8x+B_2\sin 8x$. 559. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2x+1+e^x$.

560. $y=C_1+C_2e^{3x}-3x^2-2x+\cos x+3\sin x$. 561. $y=2+$ $+e^x(C_1+C_2x-\sin x)$. 562. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+$ $+xe^x+e^{-x}$. 563. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+e^{-x}-$ $-4\cos 2x+\sin 2x$.

564. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}(2xe^{2x}-5)$.

565. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{8}\left(1-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{x}{2}\sin 2x\right)$.

566. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-\frac{x}{8}\cos x+$ $+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)e^x$. 567. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}\cos 2x+$ $+\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{x^3}{3}-x^2+2x$.

568. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+\frac{e^x}{5}+\frac{x^3}{24}+$ $+\frac{3x\sin 2x}{32}$. 569. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x+\cos x+2\sin x+$ $+4\cos 2x+\sin 2x$. 570. $y=C_1+C_2e^{-x}+xe^{-x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{x^3}{3}-$ $-x^2+2x$. 571. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{2}xe^{3x}$.

572. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\cos 2x\right)+\frac{1}{5}e^x$.

573. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3(x^2-2x)e^{-x}+3(x^2+2x)e^{-2x}$.

574. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 4x - \frac{x}{4} \sin x + 1.$

575. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{2x} + \cos x - \sin x + e^{2x} + \frac{1}{5}.$

576. $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \sin x\right) e^x.$

577. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{\cos x - 2 \sin x}{5} - \frac{e^x}{2} - \frac{x}{3}.$

578. $y = \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x\right) e^x + 2x + 1.$

579. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{25} (4 \cos x + 3 \sin x) + \frac{1}{8} \cos 2x + x + 1.$

580. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{\cos 2x + 7 \sin 2x}{25} + \sin x + 1.$

581. $y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{-\frac{x}{2}} - \cos x + x^2 - x - 2.$

582. $y = (C_1 + C_2 x + 9x^2) e^{-3x} + \sin x.$

583. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{\cos x}{5} + \frac{2 \sin x}{5} - \frac{3}{8} (\cos 2x + \sin 2x) - \frac{x}{2}.$

584. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^x + x^2 + 4x + \frac{1}{2} x^2 e^x.$

585. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x + \frac{1}{2} x \sin x.$

586. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x - x^2 + \cos x.$

587. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + \frac{e^{2x}}{32} (2x^2 - 3x).$

588. $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + C_5 e^x + \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right) e^x.$

589. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \frac{x^4}{24} - e^{-x}.$

590. $y = 2 - 2x.$ 591. $y = x^2 + e^{3x}.$ 592. $y = 2e^{3x}.$ 593. $y = x^2 e^{2x}.$ 594. $y = e^{2x} - e^{3x} + x e^{-x}.$

595. $y = 1 - x e^{-x}.$ 596. $y = \left(x + \frac{3}{5}\right) e^{-3x} + \frac{1}{5} (4 \sin x - 3 \cos x).$

597. $y = \cos x + x \sin x.$ 598. $y = \cos 2x + \frac{1}{3} (\sin 2x + \sin x).$

599. $y = x \cos x + x^2 \sin x.$ 600. $y = (\cos x - 2 \sin x) e^{2x} + (x - 1)^2 e^x.$

601. $y = x e^{3x} + x + e^{-x}.$ 602. $y = 2e^x + (\sin x - 2 \cos x) e^{-x} - 4.$ 603. $y = -[\pi \cos x + (\pi + 1 - 2x) \sin x] e^x.$ 604. $y = \operatorname{sh} x + x^2.$ 605. $y = \cos x + 2 \sin x + e^{-x} + (2x - 3) e^x.$

606. $y = 2x - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$ 607. $y = 2x e^x.$

608. $y=\frac{1}{4}\cos x$. 609. $y=\sin 2x$. 610. $y=-1$.

611. $y=\cos x$. 612. $y=e^{-x}$. 613. $y=e^{x}+3$.

614. $y=-\frac{1}{5}$. 615. $y=(\cos x+\sin x)\,e^{x}$.

616. $y=e^{-2x}\cos 2x$. 617. $y=(x^2+x)\,e^{-x}$.

618. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$. 619. $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x)$.

620. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)\right]$.

621. $y=C_1+C_2\ln x$. 622. $y=C_1(x-2)+C_2(x-2)^{-3}$.

623. $y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1)$. 624. $y=C_1+$ $+C_2x^2+C_3x^4$. 625. $y=C_1+C_2x^3+C_3\ln x$.

626. $y=C_1+C_2(x+1)^5+C_3(x+1)^{-2}$. 627. $y=C_1+$ $+(2x+1)\left[C_2\cos\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}}+C_3\sin\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

628. $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\frac{x}{2}(7-\ln x)$.

629. $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{10}(\cos\ln x-3\sin\ln x)$.

630. $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2x^4+\ln x+2\ln^2 x)$. 631. $y=C_1x+C_2x^2+$ $+(x^2+2x)\ln x+1$. 632. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{x^m}{m^2-1}$, $|m|\neq 1$.

633. $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\ln^2 x-3\ln x+2x+7$. 634. $y=\frac{1}{x+1}[C_1+$ $+C_2\ln(x+1)+\ln^3(x+1)]$. 635. $y=(x-2)^2[C_1+$ $+C_2\ln(x-2)]+x-\frac{3}{2}$. 636. $y=C_1(1+4x^2)+C_2e^{-2x}$.

637. $y=C_1(2x-3)+C_2x^{-2}$. 638. $y=C_1x^3+C_2(x+1)-x$.

639. $y=C_1x+C_2\ln x$. 640. $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$.

641. $y=C_1\cos(\sin x)+C_2\sin(\sin x)$. 642. $y=C_1x+$ $+C_2\sqrt{1+x^2}+1$. 643. $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+x^4$. 644. $y=C_1x+$ $+\left(C_2-x+\frac{x^2}{2}\right)e^{x}$. 645. $y=C_1\cos(e^{-x})+C_2\sin(e^{-x})+$ $+e^{-x}$. 646. $y=\frac{C_1}{x}+C_2e^{1/x}-\frac{\ln|x|}{x}+1$. 647. $y=$ $=C_1\cos e^{x}+C_2\sin e^{x}+x$. 648. $y=C_1(2x-1)+C_2x^2+x^3$.

649. $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m}x$ (x — longueur de la partie pendante de la

chaîne); $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$ s, $k=g$, $m=6$. 650. $\frac{d^2S}{dt^2}=$ $=1,2t$, $S=0,2t^3-t$. 651. $m\frac{d^2S}{dt^2}=-km$, $S=\frac{v_0^2}{2k}$.

652. $\frac{d^2x}{dt^2}=k^2x$, $x=ae^{kt}$.

653. $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x$. 654. $y=C_1e^x+$ $+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$.

655. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{2\cos x}$. 656. $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x+\frac{4}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{ctg} x}$. 657. $y=(C_1+C_2x)e^x-$ $-e^x\ln\sqrt{1+x^2}+e^x x\operatorname{arctg} x$. 658. $y=(C_1-x)e^{-x}\cos x+$ $+(C_2+\ln|\sin x|)e^{-x}\sin x$. 659. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+\frac{\cos 2x}{\sin x}$. 660. $y=C_1e^x+C_2-\cos e^x$. 661. $y=C_1+$ $+C_2x+C_3e^{-x}+1-x+x\ln|x|$. 662. $y=C_1e^{x^2}+C_2+$ $+(x^2-1)e^{x^2}$. 663. $y=C_1+C_2\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}(1+x\operatorname{tg} x)$.

664. $y=C_1x(\ln x-1)+C_2+x(\ln^2 x-2\ln x-2)$. 665. $y=$ $=C_1\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C_2-x^2$. 666. $y=C_1\sin x+C_2+$ $+(\ln|\sin x|-1)\sin x$. 667. $y=1$. 668. $y=\frac{1}{x}$.

669. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. 670. $y=\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)e^x$. 671. $y=$ $=\frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$. 672. $y=(x-1)e^x$. 673. $y=\frac{1}{x}$.

674. $y=1$. 675. $y''-y=0$. 676. $(x-1)y''-xy'+y=0$.

677. $(x-1)y''-x^2y'+(x^2-x+1)y=0$. 678. $y'''=0$.

679. $xy'''-y''+xy'-y=0$. 681. $y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}\times$ $\times e^{-\int p_1\,dx}\,dx$. 682. $p_0(x)=W(x)$, $p_1(x)=-W'(x)$, $p_2(x)=$ $=W(y_1',y_2')$, où $W(x)\equiv W(y_1,y_2)$ est le wronskien.

685. $p_1^2<4p_2$. 689. $v(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$.

691. $p>0$, $q>0$. 692. $p=0$, $q>0$.

693. Supposons que $y(x)>0$ sur (a,b). Puisque la solution $y(x)$ satisfait à toutes les conditions du théorème de Rolle, il existe un point $\xi\in(a,b)$ en lequel $y'(\xi)=0$ et donc

$$y''(\xi)=\frac{\xi^2+4}{\xi^2+1}>0.$$

C'est une contradiction car au point $x = \xi$ la solution $y(x)$ présente un maximum et on doit avoir $y''(\xi) < 0$. Par suite, $y(\xi) < 0$. On peut montrer de façon analogue que dans les autres points ξ, s'ils existent, on aura $y(\xi) < 0$. Il en résulte que $y(x) < 0$ sur (a, b). **706.** a) $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; b) $\lambda = 4k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

707. Pour tout λ. **708.** a) soluble, $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi}$;

b) insoluble. **709.** 1) $\lambda - \omega^2 > 0$, $y = C_1 \cos 2n\pi x + C_2 \sin 2n\pi x$; 2) $\lambda - \omega^2 = 0$, $y \equiv C = \text{const}$; 3) $\lambda - \omega^2 < 0$, $y \equiv 0$.

710. $y = \sqrt{1 + 4x - x^2}$.

711. $y = \alpha \sin x$. **712.** $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 1}$. **713.** $y = -e^x \sin x$.

714. $y = e^{\alpha}$. **715.** $y = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\cos \alpha (\pi - x)}{\sin \alpha\pi}$, $0 < \alpha < 1$.

716. $y = 1 - \cos x$. **717.** $\lambda = n$, $y = \cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$

718. $\lambda = n + \frac{1}{2}$, $y = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x$, $n = 0, 1, \ldots$

719. $y = (x - 1) e^{-x}$. **720.** $y = C \sin nx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, C — constante arbitraire. **721.** $y \equiv 0$.

722. $y = C(x \ln x - x + 1)$, C — constante arbitraire.

723. $y \equiv 0$. **724.** $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \ldots$

725. $y = 1 + x - x^2 + \ldots$ **726.** $y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \ldots$

727. $y = x - \frac{2x^4}{4!} + \frac{10x^7}{7!} - \ldots$ **728.** $y = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots$

729. $y = 1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} + \frac{(x - \pi)^3}{3\pi} + \ldots$ **730.** $y = \frac{1}{e} + \frac{\sin 1}{2!} \times (x - e)^2 + \frac{\cos 1 - \sin 1}{3!\, e} (x - e)^3 + \ldots$ **731.** $y = \frac{\pi}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{2x^6}{6!} - \ldots$ **732.** $y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$; $(= e^{x^2})$.

733. $y = C_1 \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \ldots 2n} + \ldots\right] + C_2 \left[x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} + \ldots\right]$.

734. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3 \cdot 5x^8}{8!} + \ldots + \frac{(2n+1)!!\, x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \ldots$, où $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)$. **735.** $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$ **736.** $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} +$

$+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$ **737.** $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\right.$ $\left.+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\frac{13x^6}{720}+\ldots\right)+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\frac{x^6}{72}+\right.$ $\left.+\frac{29x^7}{5040}+\ldots\right)$. **738.** $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{24}+\frac{53x^5}{120}+$ $+\frac{269x^6}{720}+\ldots$ **739.** $y=C_1\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots\right)+$ $+C_2\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\ldots\right)$; $(y=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x})$.

740. $y=C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k$.

741. $y=C_1\left(1+\frac{x}{3}+\frac{1\cdot4x^2}{3\cdot6}+\frac{1\cdot4\cdot7x^3}{3\cdot6\cdot9}+\ldots\right)+$ $+C_2x^{\frac{7}{3}}\left(1+\frac{8x}{10}+\frac{8\cdot11x^2}{10\cdot13}+\frac{8\cdot11\cdot14x^3}{10\cdot13\cdot16}+\ldots\right)$.

742. $y=C_0x^{\frac{m}{2}}\left\{1-\frac{\alpha x}{m+1}+\left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)}-\frac{E}{4(m+2)}\right]x^2+\ldots\right\}$, où C_0 est une constante arbitraire, $\rho=\frac{m}{2}$. **743.** $y=$ $=C_0x\left\{1+\frac{2-\alpha}{6}x^2+\left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120}-\frac{\beta}{20}\right]x^4+\ldots\right\}$, où C_0 est une constante arbitraire, $\rho=1$. **744.** $y=$ $=C_1J_{1/3}(2x)+C_2J_{-1/3}(2x)$. **745.** $y=C_1J_{1/2}(x)+C_2J_{-1/2}(x)$.

746. $y=C_1J_0\left(\frac{x}{3}\right)+C_2Y_0\left(\frac{x}{3}\right)$. **747.** $y=C_1J_0(2x)+C_2Y_0(2x)$.

748. $y=x^{3/2}[C_1J_{5/4}(x^2)+C_2J_{-5/4}(x^2)]$. **749.** $y=\sqrt[4]{x}[C_1J_{1/2}(\sqrt{x})+$ $+C_2J_{-1/2}(\sqrt{x})]$. **750.** $y=\frac{1}{x^2}[C_1J_2(x)+C_2Y_2(x)]$. **751.** $y=$ $=\frac{1}{x}[C_1J_1(2x)+C_2Y_1(2x)]$.

752. $y=\frac{1}{3}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3(n^2-3)}$. **753.** Pas de solutions périodiques. **754.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n^2-1)}$. **755.** Pas de solutions périodiques. **756.** $y=C-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+n\sin nx}{n^3(n^2+1)}$.

757. Pas de solutions périodiques 758. $y=\frac{\pi^2}{6}+$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-4)\cos nx+4n\sin nx}{n^2(n^2+4)^2}.$$

759. $y=-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n\pi x}{(n^2\pi^2+1)(4n^2-1)}.$

760. $y=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n\cos nx+(4-n^2)\sin nx}{(2n-1)^2(n^2+4)^2}.$

761. Pas de solutions périodiques. 764. $f(x)\sim\frac{1}{x}$. 767. Oui. 768. Oui. 769. Non. 770. Non. 771. Oui. 772. Non. 773. a) Oui; b) Non. 774. Oui. 775. Non.

776. $\begin{cases} x=3C_1\cos 3t-3C_2\sin 3t, \\ y=C_2\cos 3t+C_1\sin 3t. \end{cases}$

777. $\begin{cases} x=C_1e^t-C_2e^{-t}+t-1. \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-t+1. \end{cases}$

778. $\begin{cases} x=-2e^{-t}+3e^{-7t}, \\ y=e^{-t}+3e^{-7t}. \end{cases}$

779. $\begin{cases} x=(\sin t-2\cos t)e^{-t}, \\ y=e^{-t}\cos t. \end{cases}$

780. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t. \end{cases}$

781. $\begin{cases} x=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t, \\ y=C_1\sin t-C_2\cos t+C_2e^t, \\ z=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^t. \end{cases}$

782. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}, \\ y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}, \\ z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}. \end{cases}$

783. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\sin t+C_4\cos t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\sin t-C_4\cos t. \end{cases}$

784. $\begin{cases} x=C_1+C_2t+C_3t^2, \\ y=-(C_1+2C_3)t-\frac{C_2}{2}t^2-C_3\frac{t^3}{3}+C_4. \end{cases}$

785. $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t}, \\ y=2(C_2-C_1-C_2t)e^t+C_3e^{-2t}. \end{cases}$

786. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t - e^{2t} \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + t = C_1, \\ \dfrac{1}{x-y} + t = C_2. \end{cases}$

788. $\begin{cases} x = C_2 e^{-t/C_1}, \\ y = \dfrac{C_1}{C_2} e^{t/C_1}. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C_1, \\ 1 + C_1 x = C_2 e^{C_1 t}. \end{cases}$

790. $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x - y + t = C_2. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2} = C_1 e^t, \\ \operatorname{tg} \dfrac{x-y}{2} = C_2 e^t. \end{cases}$

792. $\begin{cases} y = C_1 x, \\ C_1 x^2 = C_2 - 2 e^{-t}. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = t, \\ \operatorname{tg}(x-y) = t. \end{cases}$

794. $\begin{cases} x = C_1 t, \\ y = C_2 e^t. \end{cases}$

795. $\begin{cases} t^2 - x^2 = C_1, \\ x^2 - y^2 = C_2. \end{cases}$

796. $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ p^2 + q^2 = C_2^2, \\ xp + yq + C_3. \end{cases}$

797. $\begin{cases} xy = C_1, \\ \ln x = C_2 + \dfrac{t^2}{2C_1}. \end{cases}$

798. $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 x - t^2, \\ y = C_2 x. \end{cases}$

799. $\begin{cases} 2x + 3y + 4t = C_1, \\ x^2 + y^2 + t^2 = C_2. \end{cases}$

800. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{C_2}{t^2}, \\ y = C_1 e^t - \dfrac{t}{3} - \dfrac{C_2}{t^2}. \end{cases}$

801. $\begin{cases} x^2 + y^2 + t^2 = C_1, \\ x^2 - 2xy - y^2 = C_2. \end{cases}$

802. $\begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}. \end{cases}$

803. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t, \\ y = C_1. \end{cases}$

804. $\begin{cases} x \equiv 0, \\ y \equiv 0. \end{cases}$

805. $\begin{cases} x = e^{2t} - e^{3t}, \\ y = e^{2t} - 2 e^{3t}. \end{cases}$

806. $\begin{cases} x = -5 e^{2t} \sin t, \\ y = e^{2t} (\cos t - 2 \sin t). \end{cases}$

807. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} C_1 e^t - C_2 e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{3} C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}, \\ z = \dfrac{1}{3} C_1 e^t - C_2 e^{-2t}. \end{cases}$

808. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} - C_3 e^t, \\ z = C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - C_3 e^t. \end{cases}$

809. $\begin{cases} x = 1 - e^{-t}, \\ y = 1 - e^{-t}, \\ z = 2 e^{-t} - 1. \end{cases}$

810. $\begin{cases} x = \frac{8}{3} e^{2t} + 2C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = \frac{29}{3} e^{2t} + 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

811. $\begin{cases} x = (1-t)\cos t - \sin t, \\ y = (t-2)\cos t + t \sin t. \end{cases}$

812. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$

813. $\begin{cases} x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2 e^{-t} \ln|e^t - 1|, \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3 e^{-t} \ln|e^t - 1|. \end{cases}$

814. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t \cos t. \end{cases}$

815. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$

816. $\begin{cases} x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + t, \\ y = C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t + 1. \end{cases}$

817. $\begin{cases} x = -C_1 \sin t + (C_2 - 1)\cos t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{cases}$

818. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 + e^t, \\ y = C_1 e^{2t} - C_2 - e^t. \end{cases}$ 819. $\begin{cases} x = -t, \\ y = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t. \end{cases}$ 821. $\begin{cases} x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t^2 - 2. \end{cases}$

822. $\begin{cases} x = -C_1 t + C_2 - 2 e^{-t} - \cos t - \sin t, \\ y = C_1 - 2e^{-t} + \cos t. \end{cases}$

823. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ y = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t, \\ z = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1. \end{cases}$

824. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = 1. \end{cases}$ 825. $\begin{cases} x = 4C_1 e^{6t} - C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{6t} + C_2 e^t. \end{cases}$

826. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{7t}, \\ y = -4C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{7t}. \end{cases}$

827. $\begin{cases} x = 4C_1 e^t + C_2 e^{6t} - \frac{5}{6}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{6t} - \frac{1}{6}. \end{cases}$

BeatriceGloria_personal library

828. $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - e^t, \\ y = C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t} + e^t. \end{cases}$

829. $\begin{cases} x = C_1 (1 + 2t) - 2C_2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ y = -C_1 t + C_2 + 2\sin t. \end{cases}$

830. $x = e^{-2t} - e^{-3t}$. 831. $x = -(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)$.

832. $x = \sin t$. 833. $x = \frac{t^2 - 2}{4} e^{-3t}$.

834. $x = e^{-t} + \sin t - \cos t$. 835. $x \equiv 0$.

836. $x = \frac{1}{2} t^2$. 837. $x = 1 - \cos t$. 838. $x \equiv 0$.

839. $x = e^{-t}$. 840. $x = -1 - t$. 841. $x = t$.

842. $x = t^2$. 843. $x \equiv 1$. 844. $x = 1 - 4t e^{-2t}$.

845. $x = \frac{t^2 + 2}{4} e^t$. 846. $x = (t + 1) \sin t - \cos t$.

847. $x = t^2 - 3t + 4$. 848. $x = e^t + \sin t$.

849. $x = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t\right) e^{2t}$. 850. $x = \left(\frac{t^2}{8} + t - 2\right) e^{t/2}$.

851. $x = (1 + t) e^{-t} + (1 - t) e^{-2t}$.

852. $x = \frac{t}{5} (6 e^{3t} - 2 e^{-2t})$. 853. $x = \frac{t^4}{12} e^{-2t}$.

854. $x = e^t + \cos t - \sin t$. 855. $x = 3(1 + t) \sin 3t$.

856. $x = t \left(\sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t\right)$.

857. $x = \frac{1}{4} (t - 1) (\cos t + \sin t)$.

858. $x = e^{2t} [(1 - t) \cos t + (1 + t) \sin t]$.

859. $x = t - 1 + 2 e^t$. 860. $x = -t/4$. 861. $x = t e^t$.

862. $x = 4t (\sin t - \cos t)$. 863. $x = \frac{1}{4} (1 - \cos 2t + t \sin 2t)$.

864. $\begin{cases} x = e^t + e^{-t}, \\ y = -e^t + e^{-t}. \end{cases}$ 865. $\begin{cases} x = 4 e^{-2t} - 3 e^{-3t}, \\ y = 3 e^{-3t} - 2 e^{-2t}. \end{cases}$

866. $\begin{cases} x = e^t (\cos t - 2 \sin t), \\ y = e^t (3 \sin t + \cos t). \end{cases}$

867. $\begin{cases} x = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} \cos 2t - 3 \sin 2t, \\ y = \frac{3}{2} t + 3 \cos 2t + \frac{13}{4} \sin 2t. \end{cases}$

868. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t. \end{cases}$ 869. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \\ y = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t). \end{cases}$

870. $\begin{cases} x = 2 - e^t, \\ y = -2 + 4e^t - te^t, \\ z = -2 + 5e^t - te^t. \end{cases}$ 871. $\begin{cases} x = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}, \\ y = e^{2t} - e^{-2t}, \\ z = 2e^{2t} + 2e^{-2t}. \end{cases}$

872. $\begin{cases} x = 3 - 2e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = e^{-t} - 3. \end{cases}$ 873. $\begin{cases} x = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}), \\ y = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}. \end{cases}$

874. $\begin{cases} x = e^t + \sin t, \\ y = e^t - \sin t. \end{cases}$ 875. $\begin{cases} x = \cos t + e^{-\sqrt{3}t}, \\ y = \frac{1}{2}(\cos t - e^{-\sqrt{3}t}). \end{cases}$

876. $\begin{cases} x = t - \frac{t^3}{6} + e^t, \\ y = 1 + \frac{1}{24}t^4 - e^t. \end{cases}$

877. $\begin{cases} x = 12(\operatorname{ch} t - 1) - \frac{7}{2}t \cdot \operatorname{sh} t, \\ y = 7t \cdot \operatorname{sh} t - 17(\operatorname{ch} t - 1). \end{cases}$

878. $\begin{cases} x = t^2 + t. \\ y = -\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$ 879. $\begin{cases} x = e^t(2\cos t - \sin t), \\ y = e^t(3\cos t + \sin t). \end{cases}$

880. Instable. 881. Instable. 882. Stable. 883. Stable. 884. Stable. 885. Stable. 886. Foyer instable. 887. Col. 888. Centre. 889. Foyer stable. 890. Nœud stable. 891. Nœud instable. 892. Nœud instable (nœud dicritique). 893. $\alpha < -3/2$. 894. a) le point de repos est asymptotiquement stable; b) le point de repos est instable; c) le point de repos est asymptotiquement stable. 895. $V = 2x^2 + 3y^2$, asymptotiquement stable. 896. $V = x^4 + y^4$, stable. 897. $V = x^2 - \frac{1}{2}y^2$, instable. 898. $V = x^2 + y^2$, asymptotiquement stable. 899. $V = x^2 + y^2$, instable. 900. $V = 2x^2 + y^2$, stable. 901. $V = x^2 + y^2$, asymptotiquement stable. 902. $V = x^2 - y^2$, instable. 903. $V = x^2 + \frac{1}{2}y^2$, stable. 904. $V = x^2 + 3y^2$, asymptotiquement stable. 905. $V = x^4 - y^4$, instable. 906. $V = x^4 + 2y^2$, stable. 907. $V = x^2 - y^2$, instable. 908. $V = 3x^2 + 2y^2$, stable. 909. Des conditions imposées à la fonction $v(x_1, \ldots, x_n)$ il est immédiat que le système donné a une solution triviale $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. En prenant pour v la fonction de Liapounov, on obtient pour la

dérivée $\frac{dv}{dt}$ en vertu du système

$$\frac{dv}{dt} = -\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2\right]\ldots$$

Par suite, la solution nulle $x = 0$ du système donné est stable au sens de Liapounov lorsque $t \to +\infty$. La stabilité sera asymptotique si $\frac{dv}{dt}$ est une fonction définie négative. **910.** Instable. **911.** Stable. **912.** Stable. **913.** Stable. **914.** Stable. **915.** Instable. **916.** Stable. **917.** Instable. **918.** Stable. **919.** Stable. **920.** Instable. **921.** L'étude en première approximation est impossible car les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures. Pourtant il existe une fonction $V = 3x^2 + 4y^2$ satisfaisant à toutes les conditions du théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique, en particulier, $\frac{dV}{dt} = -(6x^4 + 8y^4) \leqslant 0$. Par conséquent, le point de repos $x = 0$, $y = 0$ est asymptotiquement stable. **922.** $V = x^2 + y^2$; la solution $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ est asymptotiquement stable. **923.** $\Delta < 0{,}017$. **924.** $\Delta < 0{,}16$. **925.** $\Delta < 0{,}0012$. **926.** Instable. **927.** Stable. **928.** Stable. **929.** Instable. **930.** Stable. **931.** Instable. **932.** Stable. **933.** Stable. **934.** Stable. **935.** Instable. **936.** Stable. **937.** $\alpha > \frac{3}{2}$. **938.** Instable dans tous les cas. **939.** $\alpha > \frac{5}{2}$. **940.** $\alpha > 0$, $\alpha\beta > 1 + \alpha^2$. **941.** $\alpha > \frac{2}{3}$, $\beta > 0$, $9\beta - 6\alpha + 4 < 0$. **942.** Stable. **943.** Stable. **944.** Stable. **945.** Stable. **946.** Stable. **947.** Stable. **948.** Stable. **949.** Instable. **950.** Instable. **951.** Instable. **952.** Instable. **953.** Stable. **954.** Instable. **955.** Stable. **956.** Stable. **957.** Instable. **958.** Instable. **959.** Instable. **960.** Instable. **961.** $x = 0$ est instable, $x = t^4 + 1$ est stable. **962.** $x = t$ est stable, $x = e^t$ est instable. **963.** $x = t$ pour $t < 0$ et $x = -t$ pour $t > 0$ sont stables. **964.** $x = 0$ pour $t < 0$ est stable. **965.** $x = t$ est stable, $x = e^{t^2+1}$ est instable. **966.** Instable. **967.** Instable.

968. La solution $x = \sin t$ est instable pour $|t| < 1$ et stable pour $|t| > 1$.

969. $x = -1$ est stable; $x = 5$ est instable.

970. $x = t$ est stable pour $0 < t < 1$ et instable pour $t > 1$. $x = 1$ est stable pour $t > 1$ et instable pour $t < 1$.

971. $x = e^{-t}$ est une solution semi-stable.

ANNEXE 1

QUELQUES FORMULES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

En coordonnées cartésiennes (fig. 65)

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

1. Sous-tangente $TP = \frac{y}{y'}$.
2. Sous-normale $PN = yy'$.
3. Longueur du segment de tangente $TM = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right|$.
4. Longueur du segment de normale $MN = \left| y \sqrt{1 + y'^2} \right|$.
5. Différentielle de la longueur de l'arc de courbe $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

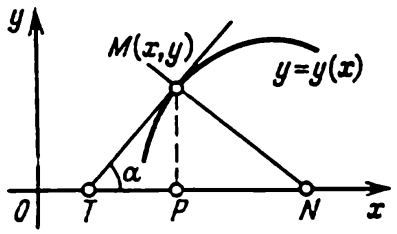

Fig. 65

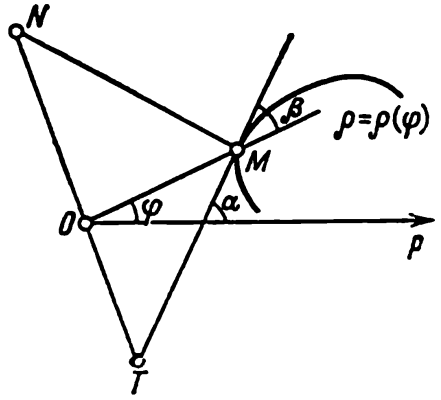

Fig. 66

En coordonnées polaires (fig. 66)

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

6. Angle β entre la tangente et le rayon-vecteur $\operatorname{tg} \beta = \frac{\rho}{\rho'}$.
7. Sous-tangente polaire $TO = \frac{\rho^2}{\rho'}$.
8. Sous-normale polaire $ON = \rho'$.
9. Longueur du segment de tangente $TM = \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right|$.
10. Longueur du segment de normale $MN = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$.
11. Différentielle de la longueur de l'arc de courbe $dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$.

ANNEXE 2

PRINCIPAUX ORIGINAUX ET LEURS TRANSFORMÉES

n° d'ordre	Original $f(t)$	Transformée $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$t^n \ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\lambda t} \ (\lambda = a + bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
6	$t^\alpha e^{\lambda t} \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
7	$\sin \omega t \ (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

Suite

n° d'ordre	Original $f(t)$	Transformée $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
10	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
11	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
12	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
13	$e^{\lambda t}\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
14	$e^{\lambda t}\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
15	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
17	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
19	$\sin(t-\tau)\ (\tau>0)$	$\dfrac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
20	$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$
21	$t^n\sin\omega t$	$\dfrac{J_m(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}\cdot n!$
22	$t^n\cos\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Re}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}\cdot n!$

Suite

n° d'ordre	Original $f(t)$	Transformée $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
23	$J_n(t)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\mathrm{Erf}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx$	$\dfrac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$
25	$\mathrm{si}\, t = \int\limits_0^t \dfrac{\sin x}{x} dx$	$\dfrac{\mathrm{arcctg}\, p}{p}$
26	$\mathrm{Ci}\, t = \int\limits_\infty^t \dfrac{\cos x}{x} dx$	$\dfrac{1}{p} \ln \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
27	$\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \dfrac{p-a}{p-b}$
28	$\dfrac{J_n(\alpha t)}{t}$ $(\alpha > 0)$	$\dfrac{1}{n\alpha^n} (\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n$
29	$\ln t$	$\dfrac{1}{p}\left(\ln \dfrac{1}{p} - \gamma\right)$, $\gamma = 0{,}57722\ldots$

BIBLIOGRAPHIE

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГИТТЛ, 1939 (en russe et en anglais).
2. *Coddington E.*, *Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York, 1955.
3. *Pontriaguine L.* Equations différentielles ordinaires. Editions Mir. Moscou, 1975.
4. *Sansone G.* Equazioni differenziali nel campo reale. Pt. 1, 2. Bologna, 1942.
5. *Philippov A.* Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir. Moscou, 1975.
6. *Elsgoltz L.* Equations différentielles et calcul variationnel (en russe). Editions Naouka. Moscou. 1965.

TABLE DES MATIÈRES

Préface de l'édition française 5

Chapitre premier. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE 7

§ 1. Notions fondamentales et définitions 7
§ 2. Méthode des isoclines 14
§ 3. Méthode des approximations successives 21
§ 4. Equations à variables séparables et équations s'y ramenant 25
§ 5. Equations homogènes et équations s'y ramenant 34
§ 6. Equations différentielles linéaires du premier ordre. Equation de Bernoulli 40
§ 7. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant 49
§ 8. Equations différentielles du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée 55
§ 9. Equation de Riccati 61
§ 10. Etablissement des équations différentielles des familles de courbes. Problèmes sur les trajectoires 63
§ 11. Solutions singulières des équations différentielles 69
§ 12. Problèmes divers 78

Chapitre II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRES SUPÉRIEURS 81

§ 13. Notions fondamentales et définitions 81
§ 14. Equations différentielles admettant un abaissement de l'ordre 84
§ 15. Equations différentielles linéaires d'ordre n 92
§ 16. Méthode des isoclines pour les équations différentielles du second ordre 133
§ 17. Problèmes aux limites 135
§ 18. Intégration des équations différentielles à l aide de séries 140

Chapitre III. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES . . . 170

§ 19. Notions fondamentales et définitions 170
§ 20. Méthode des éliminations successives (réduction d'un système d'équations différentielles à une seule équation) 180
§ 21. Recherche de combinaisons intégrables. Forme symétrique d'un système d'équations différentielles 184
§ 22. Intégration des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants. Méthode d'Euler 192

§ 23. Méthodes d'intégration des systèmes linéaires non homogènes à coefficients constants 200
§ 24. Application de la transformation de Laplace à la résolution des équations et systèmes différentiels linéaires 210

Chapitre IV. THÉORIE DE LA STABILITÉ 221

§ 25. Stabilité au sens de Liapounov. Notions fondamentales et définitions 221
§ 26. Types les plus simples de points de repos 225
§ 27. Méthode des fonctions de Liapounov 231
§ 28. Stabilité en première approximation 236
§ 29. Stabilité des solutions des équations différentielles par rapport à la variation des seconds membres des équations 241
§ 30. Critère de Routh et Hurwitz 243
§ 31. Critère géométrique de stabilité (critère de Mikhaïlov) 245
§ 32. Equations à petit paramètre de la dérivée 248

Réponses 253

Annexe 1 279

Annexe 2 280

Bibliographie 283